Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, L. Kaiser

SS 2005

11. Übung Mathematische Logik II.

Abgabe: bis Mittwoch, den 06.07. um 11:30 Uhr in der Vorlesung oder am Lehrstuhl

Aufgabe 1

Betrachten Sie die zwei Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Z}, <) + (\mathbb{Z}, <)$.

a) Für welche α ist $I_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \neq \emptyset$?

b) Für welche α ist die Klasse der zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Strukturen $L_{\alpha,\omega}$-axiomatisierbar?

c) Gilt der aufsteigende Satz von Löwenheim-Skolem für $L_{\omega_1,\omega}$ (d.h. hat jedes $\varphi \in L_{\omega_1,\omega}$ welches ein unendliches Modell hat, auch Modelle beliebig grosser Kardinalität)?

Aufgabe 2

Sei $\varphi \in L_{\kappa^+,\omega}[\tau]$ für $|\tau| \leq \kappa$. Beweisen Sie, dass zu jedem Modell $\mathfrak{B} \models \varphi$ eine Substruktur $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ der Grösse $|A| \leq \kappa$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Aufgabe 3

Die *schwache monadische Logik zweiter Stufe* (wMSO) ist die Erweiterung von FO, in der über endliche Mengen von Elementen quantifiziert werden kann. Zeigen Sie, dass zu jedem wMSO-Satz φ ein $L_{\omega_1,\omega}$-Satz φ^* existiert, der die gleichen Modelle wie φ hat.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgende Erweiterung $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}$ der Modallogik:

- $P \in \mathrm{ML}_{\infty,\omega}$ für jede atomare Eigenschaft P;
- für jede Menge $\Phi \subseteq \mathrm{ML}_{\infty,\omega}$ sind $\bigwedge \Phi, \bigvee \Phi \in \mathrm{ML}_{\infty,\omega}$;
- für jedes $\varphi \in \mathrm{ML}_{\infty,\omega}$ und Aktion a sind $\neg\varphi, \langle a\rangle\varphi, [a]\varphi \in \mathrm{ML}_{\infty,\omega}$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$ genau dann, wenn $\mathcal{K}, v$ und $\mathcal{K}', v'$ die gleichen $\mathrm{ML}_{\infty,\omega}$-Formeln erfüllen.