Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, V. Bárány, L. Kaiser

SS 2005

12. Übung Mathematische Logik II.

Abgabe: bis Mittwoch, den 13.07. um 11:30 Uhr in der Vorlesung oder am Lehrstuhl

Aufgabe 1

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n die kleinste Ordinalzahl α, so dass Spieler I eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}_\alpha((\omega^n,<),(\omega^{n+1},<))$ hat.

Aufgabe 2

Eine Boolsche Algebra (BA) ist eine $\{0,1,\wedge,\vee,\neg\}$-Struktur mit den bekannten Eigenschaften. Ein Element a einer BA ist ein *Atom* wenn es unteilbar ist, dass heisst für jedes b ist $a \wedge b = 0$ oder $a \wedge b = a$. Eine BA ist *atomfrei*, falls sie kein Atom enthält.

Beweisen Sie, dass alle atomfreien Boolschen Algebren die gleichen $L_{\infty\omega}$-Sätze erfüllen. Folgern Sie aus dem Beweis, dass die Theorie T_{afBA} der atomfreien Boolschen Algebren Quantorenelimination erlaubt und vollständig ist.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass für beliebige ω-homogene Strukturen $\mathfrak{A}$,$\mathfrak{B}$ der gleichen Signatur genau dann $\mathfrak{A} \equiv_\infty \mathfrak{B}$ gilt, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die gleichen Typen über $\emptyset$ realisieren.

Aufgabe 4

$\varphi(\vec{x}) \in L_{\infty\omega}$ ist eine *existentielle* Formel, wenn sie in Negationsnormalform ist, und keine universelle Quantoren enthält. $\varphi(\vec{x}) \in L_{\infty\omega}$ ist eine *positive* Formel falls sie kein $\neg$ enthält.

Betrachten Sie die folgenden Varianten von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen, die von der gegebenen Definition wie folgt abweichen:

(1) Im Spiel $\mathcal{G}^\exists_\alpha(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ wählt Herausforderer in jedem Zug ein Element aus A.

(2) Im Spiel $\mathcal{G}^+_\alpha(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ gewinnt Herausforderer, genau dann, wenn eine Position $(\vec{a},\vec{b})$ erreicht wird, für die eine atomare Formel $\varphi(\vec{x})$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a})$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi(\vec{b})$.

Zeigen Sie dazu:

(1) Duplikatorin hat eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}^\exists_\alpha(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ genau dann, wenn für jeden existentiellen Satz $\varphi \in L_{\infty\omega}$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \le \alpha$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$.

(2) Duplikatorin hat eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}^+_\alpha(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ genau dann, wenn für jeden positiven Satz $\varphi \in L_{\infty\omega}$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \le \alpha$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$.