Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala, R. Rabinovich

WS 2008/09

1. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 27. Oktober um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 4 Punkte

Leiten Sie die Inkonsistenz der naiven Mengenlehre her, indem Sie statt der Formel $x \notin x$ die Formel $\psi(x) = \neg\exists y \exists z(x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x)$ verwenden.

Aufgabe 2 (2 + 2) + (2 + 4) Punkte

(a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften hereditär endlicher Mengen.

(i) $\mathrm{HF}_n \subseteq \mathrm{HF}_{n+1}$ und $\mathrm{HF}_n \in \mathrm{HF}_{n+1}$

(ii) HF_n hat endlich viele Elemente.

(b) Betrachten Sie den Graphen $\mathcal{G} = (\mathrm{HF}, E)$ mit $E = \{(x, y) \mid x \in y \text{ oder } y \in x\}$.

(i) Welchen Durchmesser hat $\mathcal{G}$?

(ii) Zeigen Sie, dass für alle paarweise verschiedenen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathrm{HF}$ ein $z \in \mathrm{HF}$ existiert, das in $\mathcal{G}$ mit allen $a_1, \ldots, a_n$, aber mit keinem $b_1, \ldots, b_m$ durch eine Kante verbunden ist.

Aufgabe 3 1 + (1 + 1) + 2 + 5 Punkte

(a) Schreiben Sie die natürliche Zahl [4] in der Mengennotation (mit Hilfe der Symbole {, }, $\emptyset$ und Komma).

(b) Eine Menge x heißt transitiv, wenn für alle $y \in x$ gilt, dass $y \subseteq x$ ist.

(i) Zeigen oder widerlegen Sie, dass eine Menge x genau dann transitiv ist, wenn für alle $y \in x$ und alle $z \in y$ gilt, dass $z \in x$ ist.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Relation $\in$ auf einer transitiven Menge in gewöhnlichem Sinne transitiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl transitiv ist. Zeigen Sie ferner, dass $\in$ auf jeder natürlichen Zahl und auf der Menge der natürlichen Zahlen transitiv ist.

(d) Aus dem Kreationsaxiom folgt, dass für jede Menge x eine transitive Menge y mit $x \subseteq y$ existiert. Zeigen Sie, dass dann auch eine eindeutig bestimmte *kleinste* transitive Menge $\mathrm{TC}(x)$ existiert, so dass $x \subseteq \mathrm{TC}(x)$ gilt. (TC = Transitive Closure)

Aufgabe 4* 7* Punkte

Zeigen Sie, dass eine Menge genau dann hereditär endlich ist, wenn ihre transitive Hülle endlich ist.