**Lehr- und Forschungsgebiet**
**Mathematische Grundlagen der Informatik**
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala, R. Rabinovich

WS 2008/09

# 3. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 10. November um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

**Aufgabe 1** 2 Punkte

Für Klassen $A, B$ und $C$ seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ binäre Relationen. Die *Komposition* $S \circ R \subseteq A \times C$ von $R$ und $S$ ist definiert durch

$$S \circ R = \{\langle a, c\rangle \mid \text{ es gibt ein } b \in B \text{ mit } \langle a, b\rangle \in R \text{ und } \langle b, c\rangle \in S\}.$$

Wir definieren die Relation $\mathrm{id}_A$ durch $\{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$. Ferner sei $R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\}$. Gilt für alle Relationen $R \subseteq A \times B$, dass $R^{-1} \circ R = \mathrm{id}_A$ ist?

**Aufgabe 2** 3 Punkte

Sei $(A, \leq)$ eine Ordnung und $X \subseteq A$. Ein Element $a \in A$ heißt *untere Schranke* von $X$, wenn für alle $x \in X$ gilt $a \leq x$. Ist $a$ eine untere Schranke und gilt $a \geq b$ für alle untere Schranken $b$, dann heißt $a$ *Infimum* von $X$. Ein Element $a \in A$ ist *minimal*, wenn es kein Element $c \in A$ mit $c \leq a$ und $c \neq a$ gibt.

Wir betrachten $(B, \subseteq)$ mit $B = \{x \subseteq \omega \mid x \text{ ist endlich oder } \omega \backslash x \text{ ist endlich}\}$. (Eine Menge $x$ ist endlich, wenn es eine Bijektion $f : x \to n$ von dieser Menge in eine natürliche Zahl $n \in \omega$ gibt.)

Gibt es eine Teilmenge von $B$ ohne minimales Element? Konstruieren Sie eine Teilmenge von $B$ mit einer unteren Schranke, aber ohne Infimum.

**Aufgabe 3** 3+3 Punkte

Sei $A$ eine Klasse. Ein *Abschlussoperator* auf $A$ ist eine Funktion $c : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, so dass für alle $x, y \in \mathcal{P}(A)$ gilt:

- $x \subseteq c(x)$,
- $c(c(x)) = c(x)$ und
- wenn $x \subseteq y$, dann $c(x) \subseteq c(y)$.

Sei $(A, \leq)$ eine partielle Ordnung. Eine *obere Schranke* ist definiert analog zu der unteren Schranke in Aufgabe 2. Wir definieren für Mengen $X \subseteq A$:

- $U(X) = \{a \in A \mid a \text{ ist eine obere Schranke für } x\}$ und
- $L(X) = \{a \in A \mid a \text{ ist eine untere Schranke für } x\}$.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $c : X \mapsto L(U(X))$ ist ein Abschlussoperator auf $A$.

(b) Bildung der transitiven Hülle $\mathrm{TC} : X \mapsto \mathrm{TC}(X)$ ist ein Abschlussoperator auf $A$.

**Aufgabe 4** 2 + 2 + 3 + 1 + 4 Punkte

Sei $X$ eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $\bigcup X$ und $\bigcap X$ Ordinalzahlen sind.

(b) Geben Sie $\bigcup X$ und $\bigcap X$ für $X = \{\emptyset\}$, $X = \{n \in \omega \mid n \text{ ungerade}\}$, $X = \omega$ und $X = \omega \cup \{\omega\}$ an.

(c) Zeigen Sie, dass $\bigcup X$ die kleinste Ordinalzahl $\beta$ ist, so dass $\alpha \leq \beta$ für alle $\alpha \in X$.

(d) Geben Sie eine entsprechende Beschreibung von $\bigcap X$ an.

(e) Zeigen Sie, dass für jede Ordinalzahl $\alpha$ gilt: $\alpha = \bigcup \alpha \iff \alpha$ ist Limeszahl.

**Aufgabe 5*** 6* Punkte

Eine (total) geordnete Klasse $\langle A, \leq \rangle$ heißt *perfekt geordnet*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $A$ hat ein kleinstes Element;
- jedes Element von $A$ hat einen eindeutigen Nachfolger (mit Ausnahme des größten Elements, falls es einen gibt);
- jedes Element von $A$ kann durch die endliche Anwendung der Nachfolgeroperation entweder auf das kleinste Element von $A$ oder auf einen Limespunkt von $A$ (Element ohne direkte Vorgänger) erhalten werden.

Zeigen Sie, dass jede wohlgeordnete Klasse perfekt geordnet ist, die Umkehrung jedoch nicht gilt.