Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala, R. Rabinovich

WS 2008/09

6. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 1. Dezember um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 3 Punkte

Es seien $\tau_1 = \emptyset$ und $\tau_2 = \{c_1, \dots, c_n\}$ mit Konstantensymbolen $c_1, \dots, c_n$. Klassifizieren Sie mit Hilfe der elementaren Äquivalenz von τ_i-Strukturen alle vollständigen Theorien der Sprache $\mathrm{FO}(\tau_i)$ für $i = 1, 2$.

Aufgabe 2 4 Punkte

Geben Sie vier verschiedene vollständige Erweiterungen der Theorie der unendlichen dichten linearen Ordnungen an und zeigen Sie, dass es keine anderen vollständigen Erweiterungen gibt.

Aufgabe 3 4 + 3 Punkte

(a) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ eine erfüllbare Satzmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Zeigen Sie, dass Φ für alle $\kappa \in \mathrm{Cn}^\infty$ mit $\kappa \geq |\tau|$ ein Modell der Mächtigkeit κ hat.
Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis des Satzes von Löwenheim-Skolem vor.

(b) Sei $\kappa \in \mathrm{Cn}^\infty$. Eine Theorie T heißt *κ-kategorisch,* falls sie bis auf Isomorphie genau ein Modell der Kardinalität κ besitzt. Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ eine Theorie mit folgenden Eigenschaften:

  (i) Alle Modelle von T sind unendlich.
  (ii) Es gibt ein $\kappa \in \mathrm{Cn}^\infty$ mit $\kappa \geq |\tau|$, so dass T κ-kategorisch ist.

  Zeigen Sie, dass T vollständig ist.

Aufgabe 4 3 + 3 Punkte

Kodieren Sie in TA die Funktionen

(a) $y = 2^x$,

(b) $y = x!$

Hinweis: Benutzen Sie die Gödelsche β-Funktion.

Aufgabe 5 6 Punkte

Zeigen Sie für eine der vollständigen Erweiterungen T der Theorie der dichten linearen Ordnungen aus Aufgabe 2, dass T entscheidbar ist.
Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus Aufgabe 3(b).

Aufgabe 6* 6* Punkte

Es sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem. Zeigen Sie, dass $\Phi^{\models}$ bereits rekursiv axiomatisiert ist.
Hinweis: Geben Sie ein zu Φ äquivalentes Axiomensystem Φ' an, dessen Sätze der Länge nach strikt aufsteigend sortiert werden können.