Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala, R. Rabinovich

WS 2008/09

7. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 8. Dezember um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 3 Punkte

Zeigen Sie, dass eine rekursiv aufzählbare Theorie T, die nur endlich viele vollständige Erweiterungen $T' \supseteq T$ hat, entscheidbar ist.

Aufgabe 2 3 + 3 + 6 Punkte

Wir definieren eine Folge $(\Phi)_{i\in\omega}$ von Erweiterungen der Peano-Arithmetik durch

(1) $\Phi_0 = \Phi_{PA}$,

(2) $\Phi_{i+1} = \Phi_i \cup \{\mathrm{Wf}_{\Phi_i}\}$,

(3) $\Phi_\omega = \bigcup_{i<\omega} \Phi_i$,

wobei Φ_{PA} das Axiomensystem der Peano-Arithmetik ist.

(a) Zeigen Sie, dass alle Φ_i konsistent sind.

(b) Zeigen Sie, dass Φ_ω konsistent ist.

(c) Lösen Sie folgendes Paradoxon. Wir erweitern die Folge durch:

(2′) $\Phi_{\alpha+1} = \Phi_\alpha \cup \{\mathrm{Wf}_{\Phi_\alpha}\}$,
(3′) $\Phi_\lambda = \bigcup \Phi_{\alpha<\lambda}$ für Limesordinale α.

Da es nur abzählbar viele Formeln gibt, existiert ein Fixpunkt Φ_∞ der Folge $(\Phi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$, also $\Phi_\infty = \Phi_\infty \cup \{\mathrm{Wf}_\infty\}$. Dann gilt $\Phi_\infty \vdash \mathrm{Wf}_\infty$ im Widerspruch zum zweiten Gödelschen Satz.

Aufgabe 3* 6* Punkte

Betrachten Sie folgendes Paradoxon und lösen Sie es. Sei Φ_{PA} das Axiomensystem der Peano-Arithmetik und $\mathrm{Wf}_{\Phi_{\mathrm{PA}}}$ die Formel, welche die Widerspruchsfreiheit von Φ_{PA} ausdrückt (wie in der Vorlesung definiert). Sei $\Phi = \Phi_{\mathrm{PA}} \cup \{\neg\mathrm{Wf}_{\Phi_{\mathrm{PA}}}\}$. Da $\Phi_{\mathrm{PA}} \nvdash \mathrm{Wf}_{\Phi_{\mathrm{PA}}}$, ist Φ konsistent. Andererseits beweist Φ, dass Φ_{PA} inkonsistent ist: $\Phi \vdash \neg\mathrm{Wf}_{\Phi_{\mathrm{PA}}}$, da $\neg\mathrm{Wf}_{\Phi_{\mathrm{PA}}} \in \Phi$ ist. Aber dann ist erst recht Φ inkonsistent.