Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala, R. Rabinovich

WS 2008/09

9. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 5. Januar um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 2 + 2 + 2 Punkte

Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$, P die Menge aller Primzahlen und für jede Teilmenge $X \subseteq P$ sei $\Phi_X = \{\varphi_p(x) \mid p \in X\} \cup \{\neg\varphi_p(x) \mid p \in P \setminus X\}$. Dabei sei für jedes $p \in P$ die Formel $\varphi_p(x) \in FO(\{+, \cdot\})$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ genau dann $\mathfrak{N} \models \varphi_p(k)$ gilt, wenn p ein Teiler von k ist. Ferner sei $\varphi_{\text{prim}}(x) \in FO(\{+, \cdot\})$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ genau dann $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{prim}}(k)$ gilt, wenn $k \in P$ ist.

(a) Für welche $X \subseteq P$ ist Φ_X ein Typ von $\mathfrak{N}$ über $\emptyset$?

(b) Für welche $X \subseteq P$ ist Φ_X in $\mathfrak{N}$ realisiert?

(c) Zeigen Sie, dass es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$ gibt, die eine Nicht-Standard-Primzahl p^* enthält. (Das heißt $\mathfrak{M} \models \varphi_{\text{prim}}(p^*)$ und $p^* \notin \mathbb{N}$.)

Aufgabe 2 1 + 3 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und sei $B \subseteq A$. Ein n-Typ p von $\mathfrak{A}$ über B ist ein *Haupttyp,* falls eine Formel $\varphi(\overline{x}) \in p$ existiert, so dass $\mathfrak{A}_B \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \rightarrow \psi(\overline{x}))$ für jede Formel $\psi(\overline{x}) \in p$.

(a) Sei p ein vollständiger Typ von $\mathfrak{A}$ über B, der von einem Tupel $\overline{b} \subseteq B$ realisiert wird. Zeigen Sie, dass p ein Haupttyp ist.

(b) Zeigen Sie, dass alle Haupttypen von $\mathfrak{A}$ über B in $\mathfrak{A}$ realisiert sind.

Aufgabe 3 3 + 5 Punkte

Seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen für eine Signatur τ. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Wenn für alle endlichen Mengen $C \subseteq A$ und alle $b \in B$ ein Automorphismus f von $\mathfrak{B}$ existiert mit $f(c) = c$ für alle $c \in C$, der $f(b) \in A$ erfüllt, dann ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(b) Die Umkehrung von (a) gilt nicht.

Aufgabe 4 1 + 2 + 4 Punkte

Wir betrachten $(\mathbb{Q}, <)$.

(a) Geben Sie einen 1-Typen über $\mathbb{Q}$ an, der in $(\mathbb{Q}, <)$ realisiert ist.

(b) Geben Sie einen 1-Typen über $\mathbb{Q}$ an, der in $(\mathbb{R}, <)$, aber nicht in $(\mathbb{Q}, <)$ realisiert ist.

(c) Geben Sie drei verschiedene 1-Typen über $\mathbb{Q}$ an, die nicht in $(\mathbb{R}, <)$ realisiert sind.

Geben Sie für jeden Typen eine Struktur an, die diesen Typen realisiert.

Aufgabe 5 3 Punkte

Sei $\varphi \in FO(\tau)$ für eine Signatur τ ein beliebiger Satz, so dass φ unter Substrukturen erhalten bleibt. Zeigen Sie an Hand des Satzes von Łos-Tarski (wie er in der Vorlesung bewiesen wurde, für Formelmengen und Äquivalenz modulo einer Theorie T), dass es einen Π_1-Satz $\psi \in FO(\tau)$ gibt, so dass $\varphi \equiv \psi$ gilt.

Aufgabe 6* $2^* + 6^* + 6^*$ Punkte

Es sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, S, 0)$.

(a) Beschreiben Sie alle vollständigen 1-Typen von $\mathfrak{A}$, die auch Haupttypen sind.

(b) Für $B \subseteq \mathbb{N}$ sei $S^n_{\mathfrak{A}}(B)$ die Menge aller vollständigen n-Typen von $\mathfrak{A}$ über B (Stone-Raum). Sei $p_n = \mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}(n/\emptyset)$ für $n \in \mathbb{N}$ und sei p_∞ ein vollständiger 1-Typ von $\mathfrak{A}$ über der leeren Menge mit $\{x \neq S^n(0) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq p_\infty$. Begründen Sie, dass $S^1_{\mathfrak{A}}(\emptyset) = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{p_\infty\}$.

(c) Klassifizieren Sie mit Hilfe der elementaren Äquivalenz von $\{f\}$-Strukturen alle vollständigen 1-Typen über der leeren Menge von Strukturen der Form (X, f) mit bijektiver Funktion $f : X \to X$. Welche dieser Typen sind Haupttypen?