Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala, R. Rabinovich

WS 2008/09

10. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 12. Januar um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 3 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur für eine Signatur τ und sei $\kappa \in \mathrm{Cn}$ mit $\kappa > |A|$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}$ genau dann κ-saturiert ist, wenn A endlich ist.

Aufgabe 2 2 + 2 + 5 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Strukturen ω-saturiert sind.

   (i) $(\mathbb{Q}, <)$.
   Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus der Aufgabe 7.

   (ii) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sim)$ mit $(i, k) \sim (j, l)$ genau dann, wenn $i + k = j + l$.

(b) Geben Sie für diejenigen dieser Strukturen, welche nicht ω-saturiert sind, ω-saturierte elementare Erweiterungen an.

Aufgabe 3 3 Punkte

Geben Sie die kleinste Kardinalzahl κ an, so dass die Klasse aller zu $(\mathbb{Z}, <)$ isomorphen $<$-Strukturen in $L_{\kappa\omega}(<)$ axiomatisierbar ist oder beweisen Sie, dass keine solche Kardinalzahl existiert.

Aufgabe 4 3 Punkte

Zeigen Sie, dass der aufsteigende Satz von Löwenheim-Skolem für $L_{\omega_1\omega}$ nicht gilt.

Aufgabe 5 1 + 4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass $L_{\omega_1\omega}(\tau)$ überabzählbar ist für alle Signaturen τ.

(b) Konstruieren Sie eine überabzählbare τ-Struktur $\mathfrak{B}$ für eine geeignete *abzählbare* Signatur τ, so dass keine abzählbare τ-Struktur $\mathfrak{A}$ existiert, welche genau die gleichen $L_{\omega_1\omega}(\tau)$-Sätze erfüllt wie $\mathfrak{B}$.

Aufgabe 6 3 Punkte

Zeigen Sie, dass jede Klasse endlicher Strukturen in $L_{\infty\omega}$ axiomatisierbar ist.

Aufgabe 7* 5* Punkte

Sei p ein vollständiger 1-Typ von $(\mathbb{Q}, <)$ über einer endlichen Menge $C \subseteq \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass p ein Haupttyp ist.