Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala, R. Rabinovich

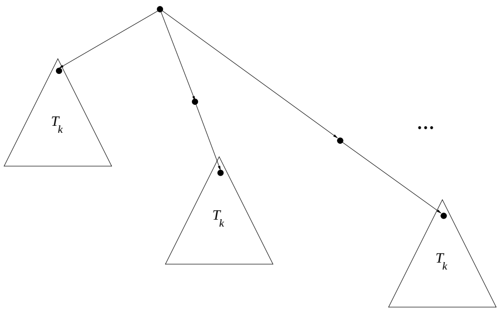
WS 2008/09

11. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 19. Januar um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 4 Punkte

Für $k = 1, 2, \ldots$ definieren wir den gerichteten Baum $\mathcal{T}_k$ mit Wurzel induktiv. $\mathcal{T}_1$ besteht aus disjunkten endlichen Pfaden der Längen jeweils $1, 2, 3, \ldots,$ die von der Wurzel ausgehen. Für $k > 1$ entsteht $\mathcal{T}_{k+1}$ aus $\mathcal{T}_1$, indem man jedes Blatt durch die Wurzel des Baumes $\mathcal{T}_k$ ersetzt.



Enstehe ferner $\mathcal{T}_k'$ aus $\mathcal{T}_k$ durch Anhängen eines unendlichen Pfades an die Wurzel. Geben Sie die kleinste Ordinalzahl α an, so dass $I_\alpha(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_k') = \emptyset$ oder beweisen Sie, dass keine solche Ordinalzahl existiert.

Aufgabe 2 3 Punkte

Die schwache monadische Logik zweiter Stufe wMSO ist die Erweiterung von FO in der über endliche Mengen quantifiziert werden kann. Zeigen Sie, dass zu jedem wMSO-Satz φ ein $L_{\omega_1\omega}$-Satz existiert, der die gleichen Modelle wie φ hat.

Aufgabe 3 5 Punkte

Es sei τ eine relationale Signatur. Eine τ-Struktur heißt κ-homogen für eine Kardinalzahl κ, wenn für alle Tupel $\overline{a}, \overline{b} \subseteq B$ mit $|\overline{a}| = |\overline{b}| < \kappa$ und $(\mathfrak{B}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \overline{b})$ sowie jedes Element $d \in B$ ein Element $c \in B$ existiert mit $(\mathfrak{B}, \overline{a}, c) \equiv (\mathfrak{B}, \overline{b}, d)$.

Seien nun $\mathfrak{A}$ sowie $\mathfrak{B}$ ω-homogene τ-Strukturen. Zeigen Sie, dass genau dann $\mathfrak{A} \equiv_\infty \mathfrak{B}$ gilt, wenn jeder Typ von $\mathfrak{A}$ über der leeren Menge, der in $\mathfrak{A}$ realisiert ist, auch ein Typ von $\mathfrak{B}$ ist, der in $\mathfrak{B}$ realisiert ist und umgekehrt.

Aufgabe 4 3 + 3 Punkte

Eine Formel $\varphi \in L_{\infty\omega}$ heißt existentiell, wenn φ in Negationsnormalform ist und keine universellen Quantoren enthält. φ heißt positiv, wenn φ keine Negationssymbole enthält. Sei nun τ eine relationale Signatur, seien $\mathfrak{A}$ sowie $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen und sei α eine Ordinalzahl. Wir betrachten Varianten $G_\alpha^\exists(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ sowie $G_\alpha^+(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ des Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiels $G_\alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, die von der gegebenen Definition wie folgt abweichen.

(1) Im Spiel $G^{\exists}_{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wählt I in jedem Zug ein Element aus A.

(2) I gewinnt $G^{+}_{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau dann, wenn eine Position $(\beta, \mathfrak{A}, \overline{a}, \mathfrak{B}, \overline{b})$ erreicht wird, so dass eine atomare Formel $\varphi(\overline{x}) \in \mathrm{FO}(\tau)$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi(\overline{b})$.

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) II hat genau dann eine Gewinnstrategie für das Spiel $G^{\exists}_{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn für jeden existentiellen Satz $\varphi \in L_{\infty\omega}(\tau)$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leq \alpha$ aus $\mathfrak{A} \models \varphi$ folgt, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$ gilt.

(b) II hat genau dann eine Gewinnstrategie für das Spiel $G^{+}_{\alpha}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn für jeden positiven Satz $\varphi \in L_{\infty\omega}(\tau)$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leq \alpha$ aus $\mathfrak{A} \models \varphi$ folgt, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$ gilt.

Aufgabe 5 5 + 5* Punkte

Für zwei lineare Ordnungen $(A, <)$ und $(B, <)$ sei $(A, <) \cdot (B, <) := (A \times B, <)$ mit $(a, b) < (a', b')$ genau dann, wenn $b < b'$ oder $b = b'$ und $a < a'$. (Intuitiv gesprochen besteht also $(A, <) \cdot (B, <)$ aus B vielen isomorphen Kopien von A, linear hintereinander geschrieben.) Für $0 < n < \omega$ sei $(A, <)^n$ definiert durch $(A, <)^1 = (A, <)$ und $(A, <)^{n+1} = (A, <)^n \cdot (A, <)$.

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n die kleinste Ordinalzahl α, so dass I eine Gewinnstrategie für das Spiel $G_{\alpha}((\mathbb{Z}, <)^n, (\mathbb{Z}, <)^{n+1})$ hat und geben Sie eine solche Strategie für I an.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n die kleinste Ordinalzahl α, so dass I eine Gewinnstrategie für das Spiel $G_{\alpha}((\omega, <)^n, (\omega, <)^{n+1})$ hat und geben Sie eine solche Strategie für I an.