Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, B. Puchala, R. Rabinovich

WS 2008/09

12. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 26. Januar um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 4 Punkte

Sei τ eine endliche relationale Signatur und $\mathfrak{A}$ sowie $\mathfrak{B}$ seien τ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \cong_\infty \mathfrak{B}$. Ferner gebe es ein binäres Relationssymbol $R \in \tau$, so dass $R^\mathfrak{A}$ eine Wohlordnung ist. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gilt.

Aufgabe 2 4 Punkte

Eine partielle Ordnung $(X, \leq)$ heißt *vollständiger Verband*, wenn jede Menge $Y \subseteq X$ ein Supremum $\bigvee Y$ und ein Infimum $\bigwedge Y$ besitzt. Eine *Antikette* auf X ist eine Menge $Y \subseteq X$, so dass je zwei verschiedene Elemente aus Y unvergleichbar sind. Wir definieren auf Antiketten eine Ordnung durch $A \preceq B$, wenn für alle $x \in A$ ein $y \in B$ existiert mit $x \leq y$. Sei nun $(X, \leq)$ ein endlicher vollständiger Verband und sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Antiketten auf X. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{A}, \preceq)$ wieder ein vollständiger Verband ist.

Aufgabe 3 2 + 4 Punkte

Sei $G = (V, E, P)$ ein endlicher gerichteter Graph mit einem unären Prädikat $P \subseteq V$ und für $v \in V$ sei $vE = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ die Menge der direkten Nachfolger von v in G.

(a) Wir definieren $F : 2^V \to 2^V$ durch $F(X) = P \cup \{v \in V \mid vE \cap X \neq \emptyset\}$. Zeigen Sie, dass F einen kleinsten Fixpunkt besitzt, und beschreiben Sie diesen.

(b) Wir definieren $G : 2^V \times 2^V \to 2^V$ wie folgt.

$$G(X, Y) := (P \cap \{v \in V \mid vE \cap Y \neq \emptyset\}) \cup \{v \in V \mid vE \cap X \neq \emptyset\}.$$

Ferner seien $F_Y : 2^V \to 2^V$ und $\mathrm{lfp}_G : 2^V \to 2^V$ definiert durch $F_Y(X) = G(X, Y)$ für $X, Y \in 2^V$ und $\mathrm{lfp}_G(Y) = \mathrm{lfp}(F_Y)$ für $Y \in 2^V$. Zeigen Sie, dass F_Y für alle $Y \in 2^V$ einen kleinsten Fixpunkt hat. Zeigen Sie ferner, dass lfp_G einen größten Fixpunkt besitzt, und beschreiben Sie diesen.

Aufgabe 4 4 + 3 Punkte

Seien $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, S, 0)$ und $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, S, 0)$ wobei S jeweils die Nachfolgerfunktion auf $\mathbb{N}$ beziehungsweise $\mathbb{Z}$ ist.

(a) Definieren Sie die Relationen $+ \subseteq \mathbb{N}^3$ und $\cdot \subseteq \mathbb{N}^3$ in LFP.

(b) Definieren Sie die Relation $< \subseteq \mathbb{Z}^2$ in LFP.

Aufgabe 5 3 + 2 + 5* Punkte

Wir betrachten die Signatur $\tau = \{E, P\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol E und einem einstelligen Relationssymbol P.

(a) Betrachten Sie folgende FO-Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$.
$\varphi(x, y) := \forall x'(Exx' \rightarrow \exists y'(Eyy' \wedge Rx'y')) \wedge \forall y'(Eyy' \rightarrow \exists x'(Exx' \wedge Rx'y'))$.
Charakterisieren Sie die Klasse aller gerichteteten Graphen $G = (V, E^G)$ mit
$G \models \exists a \exists b[\mathrm{gfp}\, R\, xy.\varphi(x, y)](a, b)$.

(b) Geben Sie eine LFP-Formel $\varphi(x) \in \mathrm{LFP}(\tau)$ an, so dass für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E^G, P^G)$ und jeden Knoten $v \in V$ genau dann $G \models \varphi(v)$ gilt, wenn an jedem Terminalknoten, der von v aus erreichbar ist, P gilt.

(c*) Geben Sie eine LFP-Formel $\varphi(x) \in \mathrm{LFP}(\tau)$ an, so dass für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E^G, P^G)$ und jeden Knoten $v \in V$ genau dann $G \models \varphi(v)$ gilt, wenn es von v aus einen unendlichen Pfad gibt, auf dem nur endlich oft P gilt.

Aufgabe 6* 5* Punkte

Es sei R ein 1-stelliges Relationssymbol. Für eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}$ bezeichne $\tau(\varphi)$ die Signatur von φ und für eine Struktur $\mathfrak{A}$ der Signatur $\tau(\varphi)\setminus\{R\}$ sei $\varphi_R^{\mathfrak{A}}$ der zugehörige Fixpunkt-Operator, wie in der Vorlesung definiert.
Zeigen Sie, dass folgendes Problem unentscheidbar ist:

- Gegeben eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}$.
- Ist $\varphi_R^{\mathfrak{A}}$ monoton für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ der Signatur $\tau(\varphi) \setminus \{R\}$?