Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, S. Leßenich

WS 2012/13

1. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 22. Oktober um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Teilaufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 4 Punkte

Leiten Sie die Inkonsistenz der naiven Mengenlehre her, indem Sie statt der Formel $x \notin x$ die Formel $\psi(x) = \neg\exists y \exists z(x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x)$ verwenden.

Aufgabe 2 $1 + (1 + 1) + 2 + 5^*$ Punkte

(a) Schreiben Sie die natürliche Zahl [4] in der Mengennotation (mit Hilfe der Symbole {, }, $\emptyset$ und Komma).

(b) Eine Menge x heißt transitiv, wenn für alle $y \in x$ gilt, dass $y \subseteq x$ ist.

 (i) Zeigen oder widerlegen Sie, dass eine Menge x genau dann transitiv ist, wenn für alle $y \in x$ und alle $z \in y$ gilt, dass $z \in x$ ist.

 (ii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Relation $\in$ auf einer transitiven Menge in gewöhnlichem Sinne transitiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl transitiv ist. Zeigen Sie ferner, dass $\in$ auf jeder natürlichen Zahl und auf der Menge der natürlichen Zahlen transitiv ist.

(d)* Aus dem Kreationsaxiom folgt, dass für jede Menge x eine transitive Menge y mit $x \subseteq y$ existiert. Zeigen Sie, dass dann auch eine eindeutig bestimmte *kleinste* transitive Menge $\mathrm{TC}(x)$ existiert, so dass $x \subseteq \mathrm{TC}(x)$ gilt. (TC = Transitive Closure)

Aufgabe 3 $(2 + 2 + 2 + 2)$ Punkte

Geben Sie jeweils eine Formel $\varphi_i(x) \in \mathrm{FO}(\{\in\})$ an, so dass $A_i = \{x \mid \varphi_i(x)\}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \mid x \text{ hat weniger als 3 Elemente}\} \\ A_2 &= \{x \mid x \text{ enthält die leere Menge } \emptyset\} \\ A_3 &= \{x \mid x = \mathrm{HF}_3\} \\ A_4 &= \{x \mid \text{alle Elemente von } x \text{ sind transitiv}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 $(2 + 2) + (2 + 4)$ Punkte

(a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften hereditär endlicher Mengen.

 (i) $\mathrm{HF}_n \subseteq \mathrm{HF}_{n+1}$ und $\mathrm{HF}_n \in \mathrm{HF}_{n+1}$

 (ii) HF_n hat endlich viele Elemente.

(b) Betrachten Sie den Graphen $\mathcal{G} = (\mathrm{HF}, E)$ mit $E = \{(x, y) \mid x \in y \text{ oder } y \in x\}$.

 (i) Welchen Durchmesser hat $\mathcal{G}$?

 (ii) Zeigen Sie, dass für alle paarweise verschiedenen $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathrm{HF}$ ein $z \in \mathrm{HF}$ existiert, das in $\mathcal{G}$ mit allen $a_1, \dots, a_n$, aber mit keinem $b_1, \dots, b_m$ durch eine Kante verbunden ist.