

### 3. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 05. November um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

#### Aufgabe 1

4 Punkte

Sei  $(A, \leq)$  eine partielle Ordnung und  $X \subseteq A$ . Ein Element  $a \in A$  heißt *untere Schranke* von  $X$ , wenn für alle  $x \in X$  gilt  $a \leq x$ . Ist  $a$  eine untere Schranke und gilt  $a \geq b$  für alle untere Schranken  $b$ , dann heißt  $a$  *Infimum* von  $X$ . Ein Element  $a \in X$  ist *minimal* (bezüglich  $X$ ), wenn es kein Element  $c \in X$  mit  $c \leq a$  und  $c \neq a$  gibt.

Wir betrachten  $(B, \subseteq)$  mit  $B = \{x \subseteq \omega \mid x \text{ ist endlich oder } \omega \setminus x \text{ ist endlich}\}$ , wobei  $\omega$  die Menge der natürlichen Zahlen ist. (Eine Menge  $x$  ist endlich, wenn es eine Bijektion  $f : x \rightarrow n$  von dieser Menge in eine natürliche Zahl  $n \in \omega$  gibt.)

Gibt es eine Teilmenge von  $B$  ohne minimales Element? Konstruieren Sie eine Teilmenge von  $B$  mit einer unteren Schranke, aber ohne Infimum.

#### Aufgabe 2

2 Punkte

Für Klassen  $A, B$  und  $C$  seien  $R \subseteq A \times B$  und  $S \subseteq B \times C$  binäre Relationen. Die *Komposition*  $S \circ R \subseteq A \times C$  von  $R$  und  $S$  ist definiert durch

$$S \circ R = \{(a, c) \mid \text{es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S\}.$$

Wir definieren die Relation  $\text{id}_A$  durch  $\{(a, a) \mid a \in A\}$ . Ferner sei  $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ . Gilt für alle Relationen  $R \subseteq A \times B$ , dass  $R^{-1} \circ R = \text{id}_A$  ist?

#### Aufgabe 3

1 + 2 + 2 + 2 Punkte

Geordnete Paare  $(x, y)$  von Mengen  $x$  und  $y$  können durch  $\{\{x\}, \{x, y\}\}$  definiert werden. Eine Formalisierung von Tripeln  $(x, y, z)$  als Mengen ist *adäquat*, wenn  $(x, y, z) = (x', y', z')$  genau dann, wenn  $x = x', y = y'$  und  $z = z'$ . Sind die folgenden Formalisierungen adäquat:

- (a)  $(x, y, z) = ((x, y), z)$ ,
- (b)  $(x, y, z) = \{\{x, [0]\}, \{y, [1]\}, \{z, [2]\}\}$ ,
- (c)  $(x, y, z) = \{x, \{y\}, \{\{z\}\}\}$ ,
- (d)  $(x, y, z) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ ?