Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, S. Leßenich

WS 2012/13

4. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 12. November um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 10 Punkte

Vergleichen Sie die Kardinalitäten der folgenden Mengen.

(a) Die Klasse der reellen Zahlen $\mathbb{R}$,

(b) die Klasse aller Polynome $a_k X^k + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$,

(c) die Klasse aller Äquivalenzklassen $\{[x]_\sim : x \in \mathbb{R}\}$ der Relation $\sim = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Q}\}$,

(d) das Klasse aller reellen funktionen $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$.

Hinweis. Sie können das Cantor-Schröder-Bernstein-Theorem benutzen.

Aufgabe 2 2 + 3 + 1 + 4 Punkte

Sei X eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $\bigcup X$ und $\bigcap X$ Ordinalzahlen sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\bigcup X$ die kleinste Ordinalzahl β ist, so dass $\alpha \leq \beta$ für alle $\alpha \in X$.

(c) Geben Sie eine entsprechende Beschreibung von $\bigcap X$ an.

(d) Zeigen Sie, dass für jede Ordinalzahl α gilt: $\alpha = \bigcup \alpha \iff \alpha$ ist Limesordinal oder $\alpha = \emptyset$.

Aufgabe 3 4 + 5 + 1 Punkte

Für lineare Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$ und $\mathfrak{B} = (B, <)$ definiert man deren geordnete Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ als $(A \cup B, <)$ mit $a < b$ für alle $a \in A$, $b \in B$ (und $<$ auf A und B wie gehabt).

(a) Zeigen Sie, dass die geordnete Summe zweier Wohlordnungen auf Mengen eine Wohlordnung ist.

(b) Für Ordinalzahlen α, β sei $\alpha + \beta$ die geordnete Summe von α und β. Zeigen Sie, dass diese Addition auf ω mit der üblichen Addition übereinstimmt.

(c) Gilt $1 + \alpha = \alpha + 1$ für unendliche Ordinalzahlen α?

Aufgabe 4 5 + 5 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass man zu jeder partiellen Ordnung $\leq$ auf einer endlichen Menge A eine *Linearisierung* $\leq'$ konstruieren kann, so dass für alle $x, y \in A$ gilt: $x \leq y \Rightarrow x \leq' y$.

(b) Eine (total) geordnete Klasse $\langle A, \leq \rangle$ heißt *perfekt geordnet*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- A hat ein kleinstes Element;
- jedes Element von A hat einen eindeutigen Nachfolger (mit Ausnahme des größten Elements, falls es einen gibt);
- jedes Element von A kann erhalten werden durch die endliche Anwendung der Nachfolgeroperation entweder auf das kleinste Element von A oder auf einen Limespunkt von A (Element ohne direkte Vorgänger).

Zeigen Sie, dass jede wohlgeordnete Klasse perfekt geordnet ist, die Umkehrung jedoch nicht gilt.