Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, S. Lessenich

WS 2012/13

5. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 26. November um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 4 + (2 + 4) Punkte

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Auswahlaxioms, dass für alle Mengen a und b es eine injektive Funktion $f : a \to b$ oder $f : b \to a$ gibt.

(b) Wir betrachten folgende Umformulierungen des Auswahlaxioms:

AC*: Zu jeder Menge x gibt es eine Auswahlfunktion auf $\mathcal{P}(x)$.

KP: Für jede Familie $(X_i)_{i\in I}$ von nicht-leeren Mengen ist das kartesische Produkt $\Pi_{i\in I} X_i$ nicht leer.

ÄR: Jede Äquivalenzrelation über einer Menge x besitzt ein Repräsentantensystem.

(i) Präzisieren Sie die in diesen Aussagen verwendeten Begriffe.

(ii) Zeigen Sie, dass **AC***, **KP** und **ÄR** zum Auswahlaxiom äquivalent sind (auf der Basis von ZF).

Aufgabe 2 3 + 3 Punkte

Eine Menge x ist Dedekind-endlich, wenn keine echte Teilmenge von x gleichmächtig zu x ist. Zeigen Sie:

(a) Die Menge x ist genau dann Dedekind-endlich, wenn sie endlich ist.

(b) Die Menge x ist genau dann endlich, wenn jede Funktion $f : x \to x$, die injektiv oder surjektiv ist, bereits bijektiv ist.

Aufgabe 3 (2 + 4) + 4 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $|\{\alpha < \aleph_1 \mid \alpha \text{ ist Nachfolgerordinal}\}| = \omega$,

(ii) $|\{\alpha < \aleph_1 \mid \alpha \text{ ist Limesordinal}\}| = \omega$.

(b) Es sei x eine Menge mit $|x| \leq \kappa$ für ein $\kappa \in \mathrm{Cn}^\infty$ und es gelte $|y| \leq \kappa$ für alle $y \in x$. Zeigen Sie, dass $|\bigcup x| \leq \kappa$ ist.