Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, S. Leßenich

WS 2012/13

7. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 3. Dezember um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 2+2 Punkte

Klassifizieren Sie, für die folgenden beiden Signaturen, mit Hilfe der elementaren Äquivalenz von τ-Strukturen alle vollständigen Theorien der Sprache $\mathrm{FO}(\tau)$.

- $\tau = \{c\}$, wobei c ein Konstantensymbol ist.
- $\tau = \{c_0, \cdots, c_n\}, n \in \omega$, wobei $c_1, \cdots, c_n$ Konstantensymbole sind.

Aufgabe 2 4 + 3 Punkte

(a) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ eine erfüllbare Satzmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Zeigen Sie, dass Φ für alle $\kappa \in \mathrm{Cn}^\infty$ mit $\kappa \geq |\tau|$ ein Modell der Mächtigkeit κ hat.
Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis des Satzes von Löwenheim-Skolem vor.

(b) Sei $\kappa \in \mathrm{Cn}^\infty$. Eine Theorie T heißt *κ-kategorisch,* falls sie bis auf Isomorphie genau ein Modell der Kardinalität κ besitzt. Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ eine Theorie mit folgenden Eigenschaften:

   (i) Alle Modelle von T sind unendlich.

   (ii) Es gibt ein $\kappa \in \mathrm{Cn}^\infty$ mit $\kappa \geq |\tau|$, so dass T κ-kategorisch ist.

   Zeigen Sie, dass T vollständig ist.

Aufgabe 3 3 Punkte

Es sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem. Zeigen Sie, dass $\Phi^{\models}$ bereits rekursiv axiomatisiert ist.
Hinweis: Geben Sie ein zu Φ äquivalentes Axiomensystem Φ' an, dessen Sätze der Länge nach strikt aufsteigend sortiert werden können.

Aufgabe 4 3 Punkte

Zeigen Sie, dass eine rekursiv aufzählbare Theorie T, die nur endlich viele vollständige Erweiterungen $T' \supseteq T$ hat, entscheidbar ist.

Aufgabe 5 3 + 3 + 6 Punkte

Wir definieren eine Folge $(\Phi)_{i\in\omega}$ von Erweiterungen der Peano-Arithmetik durch

(1) $\Phi_0 = \Phi_{PA}$,

(2) $\Phi_{i+1} = \Phi_i \cup \{\mathrm{Kons}_{\Phi_i}\}$,

(3) $\Phi_\omega = \bigcup_{i<\omega} \Phi_i$,

wobei Φ_{PA} das Axiomensystem der Peano-Arithmetik ist.

(a) Zeigen Sie, dass alle Φ_i konsistent sind.

(b) Zeigen Sie, dass Φ_ω konsistent ist.

(c) Lösen Sie folgendes Paradoxon. Wir erweitern die Folge durch:

(2′) $\Phi_{\alpha+1} = \Phi_\alpha \cup \{\mathrm{Kons}_{\Phi_\alpha}\}$,

(3′) $\Phi_\lambda = \bigcup \Phi_{\alpha<\lambda}$ für Limesordinale λ.

Da es nur abzählbar viele Formeln gibt, existiert ein Fixpunkt Φ_∞ der Folge $(\Phi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$, also $\Phi_\infty = \Phi_\infty \cup \{\mathrm{Kons}_\infty\}$. Dann gilt $\Phi_\infty \vdash \mathrm{Kons}_\infty$ im Widerspruch zum zweiten Gödelschen Satz.