Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, S. Leßenich

WS 2012/13

9. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 10. Dezember um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 2 + 2 Punkte

Sei $T \subseteq FO(\tau)$ eine Theorie über der Signatur τ und sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von τ-Strukturen, die unter Isomorphie abgeschlossen ist, das heißt für alle τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ folgt aus $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, dass auch $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$ ist. Mit $\mathrm{Mod}(T)$ bezeichnen wir die Klasse aller Modelle von T und $\mathrm{Th}(\mathcal{K})$ ist die Theorie der Modellklasse $\mathcal{K}$, das heißt $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}} \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\mathrm{Mod}(\mathrm{Th}(\mathcal{K})) = \mathcal{K}$.

(b) $\mathrm{Th}(\mathrm{Mod}(T)) = T$.

Aufgabe 2 3 + 5 Punkte

Seien $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen für eine Signatur τ. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Wenn für alle endlichen Mengen $C \subseteq A$ und alle $b \in B$ ein Automorphismus f von $\mathfrak{B}$ existiert mit $f(c) = c$ für alle $c \in C$, der $f(b) \in A$ erfüllt, dann ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(b) Die Umkehrung von (a) gilt nicht.

Aufgabe 3 4+2+3 Punkte

(a) Sei τ eine funktionale Signatur ohne Konstantensymbole, und sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Sei $G_{\mathfrak{A}} = (A, E)$ der gerichtete Graph, der eine Kante (a, b) genau dann enthält, wenn ein Tupel $\bar{a}$ existiert mit $a \in \bar{a}$ und $f(\bar{a}) = b$. Für zwei Elemente a und b ist die Distanz $d_{\mathfrak{A}}(a, b)$ definiert als die Länge des kürzesten Pfades von a nach b in $G_{\mathfrak{A}}$, falls ein solcher Pfad existiert, und $d_{\mathfrak{A}}(a, b) = \infty$, sonst. (Beachten Sie, dass $d_{\mathfrak{A}}(a, a) = 0$.) Sei nun $B \subseteq A$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass für alle $c \in \langle B \rangle_{\mathfrak{A}}$ ein $b \in B$ existiert, mit $d_{\langle B \rangle_{\mathfrak{A}}}(b, c) < \infty$.

(b) Sei $\mathfrak{A} = (\alpha, s)$ für ein $\alpha \in \mathrm{On}$ eine Struktur mit $s(\beta) = \beta + 1$. Geben Sie die kleinste Menge B an mit $\langle B \rangle_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$.

(c) Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und sei $B \subseteq A$ eine Teilmenge. Sei weiter A' das Universum der Struktur $\mathfrak{B} = \langle B \rangle_{\mathfrak{A}}$. Zeigen Sie, dass es für jeden $\mathrm{FO}(\tau \cup A')$-Satz φ einen $\mathrm{FO}(\tau \cup B)$-Satz φ' gibt, mit $\mathfrak{B}_{A'} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B}_B \models \varphi'$.

Aufgabe 4 8 Punkte

Beweisen Sie die Variante des Satzes von Łos-Tarski für existentielle Formeln:

Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ eine Theorie und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Menge von Sätzen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(a) Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ Modelle von T, so dass $\mathfrak{A} \models \Phi$, und ist $f \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ eine Einbettung, so gilt auch $\mathfrak{B} \models \Phi$.

(b) Es existiert eine Menge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ von Σ_1-Sätzen, so dass für jedes Modell $\mathfrak{A} \models T$ genau dann $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt, wenn auch $\mathfrak{A} \models \Psi$ gilt.