Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, S. Leßenich

WS 2012/13

10. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 07. Januar um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 3 + 4 + 4 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ Struktur und sei $B \subseteq A$. Ein n-Typ p von $\mathfrak{A}$ über B ist ein *Haupttyp*, wenn eine Formel $\varphi(\bar{x}) \in p$ existiert, so dass $\mathfrak{A}_B \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x}))$ für alle $\psi(\bar{x}) \in p$.

(a) Sei p ein vollständiger Typ von $\mathfrak{A}$ über B, welcher durch ein Tupel $\bar{b} \subseteq B$ realisiert ist. Zeigen sie, dass p ein Haupttyp ist.

(b) Zeigen sie, dass alle Hauptypen von $\mathfrak{A}$ über B in $\mathfrak{A}$ realisiert sind.

(c) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Beweisen sie, dass $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ gilt genau dann, wenn alle Haupttypen von $\mathfrak{B}$ über A in $\mathfrak{A}$ realisiert sind.

Aufgabe 2 5 Punkte

Sei p ein vollständiger 1-Typ von $(\mathbb{Q}, <)$ über einer endlichen Menge $C \subseteq \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass p ein Haupttyp ist.

Aufgabe 3 3 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur für eine Signatur τ und sei $\kappa \in \mathrm{Cn}$ mit $\kappa > |A|$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}$ κ-saturiert ist genau dann, wenn A endlich ist.

Aufgabe 4 2 + 2 + 5 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Strukturen ω-saturiert sind.

  (i) $(\mathbb{Q}, <)$.
  Hinweis: Verwenden Sie das Resultat aus Aufgabe 2.

  (ii) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sim)$ mit $(i, k) \sim (j, l)$ genau dann, wenn $i + k = j + l$.

(b) Geben Sie für diejenigen dieser Strukturen, welche nicht ω-saturiert sind, ω-saturierte elementare Erweiterungen an.