Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, S. Leßenich

WS 2012/13

11. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 14. Januar um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 3 Punkte

Geben Sie die kleinste Kardinalzahl κ an, so dass die Klasse aller zu $(\mathbb{Z}, <)$ isomorphen $<$-Strukturen in $L_{\kappa\omega}(<)$ axiomatisierbar ist oder beweisen Sie, dass keine solche Kardinalzahl existiert.

Aufgabe 2 1 + 4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass $L_{\omega_1\omega}(\tau)$ überabzählbar ist für alle Signaturen τ.

(b) Konstruieren Sie eine überabzählbare τ-Struktur $\mathfrak{B}$ für eine geeignete *abzählbare* Signatur τ, so dass keine abzählbare τ-Struktur $\mathfrak{A}$ existiert, welche genau die gleichen $L_{\omega_1\omega}(\tau)$-Sätze erfüllt wie $\mathfrak{B}$.

Aufgabe 3 3 Punkte

Zeigen Sie, dass jede Klasse endlicher Strukturen in $L_{\infty\omega}$ axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4 5 Punkte

Es sei τ eine relationale Signatur. Eine τ-Struktur $\mathfrak{B}$ heißt κ-homogen für eine Kardinalzahl κ, wenn für alle Tupel $\overline{a}, \overline{b} \subseteq B$ mit $|\overline{a}| = |\overline{b}| < \kappa$ und $(\mathfrak{B}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \overline{b})$ sowie jedes Element $d \in B$ ein Element $c \in B$ existiert mit $(\mathfrak{B}, \overline{a}, c) \equiv (\mathfrak{B}, \overline{b}, d)$.

Seien nun $\mathfrak{A}$ sowie $\mathfrak{B}$ ω-homogene τ-Strukturen. Zeigen Sie, dass genau dann $\mathfrak{A} \equiv_\infty \mathfrak{B}$ gilt, wenn jeder Typ von $\mathfrak{A}$ über der leeren Menge, der in $\mathfrak{A}$ realisiert ist, auch ein Typ von $\mathfrak{B}$ ist, der in $\mathfrak{B}$ realisiert ist und umgekehrt.

Aufgabe 5 4 Punkte

Sei τ eine endliche relationale Signatur. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \cong_\infty \mathfrak{B}$. Ferner existiere ein zweistelliges Relationssymbol $R \in \tau$, so dass $R^{\mathfrak{A}}$ eine Wohlordnung ist. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gilt.