Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Abu Zaid, S. Leßenich

WS 2012/13

12. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 21. Januar um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 4 Punkte

Ein Operator $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ ist *inflationär*, wenn $F(X) \supseteq X$ für alle $X \subseteq A$ gilt.
Geben sie Beispiele für Operatoren $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) F hat einen Fixpunkt, aber besitzt keinen kleinsten Fixpunkt.

(ii) F hat einen kleinsten Fixpunkt, aber F ist nicht monoton.

(iii) F ist monoton, aber nicht inflationär.

(iv) F ist inflationär, aber nicht monoton.

Aufgabe 2 2 + 4 Punkte

Sei $G = (V, E, P)$ ein endlicher gerichteter Graph mit einem unären Prädikat $P \subseteq V$ und fr $v \in V$ sei $vE = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ die Menge der direkten Nachfolger von v in G.

(a) Wir definieren $F : 2^V \to 2^V$ durch $F(X) = P \cup \{v \in V \mid vE \cap X \neq \emptyset\}$. Zeigen Sie, dass F einen kleinsten Fixpunkt besitzt, und beschreiben Sie diesen.

(b) Wir definieren $G : 2^V \times 2^V \to 2^V$ wie folgt.

$$G(X, Y) := (P \cap \{v \in V \mid vE \cap Y \neq \emptyset\}) \cup \{v \in V \mid vE \cap X \neq \emptyset\}.$$

Ferner seien $F_Y : 2^V \to 2^V$ und $\mathrm{lfp}_G : 2^V \to 2^V$ definiert durch $F_Y(X) = G(X, Y)$ für $X, Y \in 2^V$ und $\mathrm{lfp}_G(Y) = \mathrm{lfp}(F_Y)$ für $Y \in 2^V$. Zeigen Sie, dass F_Y für alle $Y \in 2^V$ einen kleinsten Fixpunkt hat. Zeigen Sie ferner, dass lfp_G einen größten Fixpunkt besitzt, und beschreiben Sie diesen.

Aufgabe 3 4 + 3 Punkte

Seien $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, S, 0)$ und $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, S, 0)$ wobei S jeweils die Nachfolgerfunktion auf $\mathbb{N}$ beziehungsweise $\mathbb{Z}$ ist.

(a) Definieren Sie die Relationen $+ \subseteq \mathbb{N}^3$ und $\cdot \subseteq \mathbb{N}^3$ in LFP.

(b) Definieren Sie die Relation $< \subseteq \mathbb{Z}^2$ in LFP.

Aufgabe 4 2 + 5 Punkte

Wir betrachten die Signatur $\tau = \{E, P\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol E und einem einstelligen Relationssymbol P.

(a) Geben Sie eine LFP-Formel $\varphi(x) \in \text{LFP}(\tau)$ an, so dass für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E^G, P^G)$ und jeden Knoten $v \in V$ genau dann $G \models \varphi(v)$ gilt, wenn an jedem Terminalknoten, der von v aus erreichbar ist, P gilt.

(b) Geben Sie eine LFP-Formel $\varphi(x) \in \text{LFP}(\tau)$ an, so dass für jeden gerichteten Graphen $G = (V, E^G, P^G)$ und jeden Knoten $v \in V$ genau dann $G \models \varphi(v)$ gilt, wenn es von v aus einen unendlichen Pfad gibt, auf dem nur endlich oft P gilt.

Aufgabe 5 5 Punkte

Zeigen Sie, dass folgendes Problem unentscheidbar ist:

- Gegeben eine Formel $\varphi(x) \in \text{FO}$.
- Ist $F_\varphi^{\mathfrak{A}}$ monoton für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ der Signatur $\tau(\varphi) \setminus \{R\}$?

Hinweis: Benutzen sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für FO unentscheidbar ist.