

## 1. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Mittwoch, 22. Oktober um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Teilaufgaben, die mit einem \* versehen sind, sind Bonusaufgaben.

### Aufgabe 1

4 Punkte

Leiten Sie die Inkonsistenz der naiven Mengenlehre her, indem Sie statt der Formel  $x \notin x$  die Formel  $\psi(x) = \neg \exists y(x \in y \wedge y \in x)$  verwenden.

### Aufgabe 2

2 Punkte

Seien  $a, b$  Mengen und  $A, B$  echte, nichtleere Klassen. Sei  $\varphi(x)$  eine Eigenschaft von Mengen. Welche der folgenden Klassen sind Mengen:  $a \cap B$ ,  $a \setminus B$ ,  $A \Delta b$ ,  $A^c \cap B$ ,  $\bigcap B$ ,  $\{x \in B : x \in a, \varphi(x)\}$ ?

### Aufgabe 3

1 + (1 + 1) + 2 + 5\* Punkte

- (a) Schreiben Sie die natürliche Zahl [4] in der Mengennotation (mit Hilfe der Symbole  $\{, \}$ ,  $\emptyset$  und Komma).
- (b) Eine Klasse  $A$  heißt transitiv, wenn für alle  $x \in A$  gilt, dass  $x \subseteq A$  ist.
  - (i) Zeigen oder widerlegen Sie, dass eine Klasse  $A$  genau dann transitiv ist, wenn für alle  $x \in A$  und alle  $y \in x$  gilt, dass  $y \in A$  ist.
  - (ii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Relation  $\in$  auf einer transitiven Klasse  $A$  in gewöhnlichem Sinne transitiv ist, dass also für alle  $x, y, z \in A$  aus  $z \in y$  und  $y \in x$  immer  $z \in x$  folgt.
- (c) Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl transitiv ist. Zeigen Sie ferner, dass  $\in$  auf jeder natürlichen Zahl und auf der Menge der natürlichen Zahlen transitiv ist.
- (d)\* Aus dem Kurationsaxiom folgt, dass für jede Menge  $x$  eine transitive Menge  $y$  mit  $x \subseteq y$  existiert. Zeigen Sie, dass dann auch eine eindeutig bestimmte *kleinste* transitive Menge  $\text{TC}(x)$  existiert, so dass  $x \subseteq \text{TC}(x)$  gilt. (TC = Transitive Closure)

### Aufgabe 4

(2 + 2) + (2 + 4) Punkte

- (a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften hereditär endlicher Mengen.
  - (i)  $\text{HF}_n \subseteq \text{HF}_{n+1}$  und  $\text{HF}_n \in \text{HF}_{n+1}$
  - (ii)  $\text{HF}_n$  hat endlich viele Elemente.
- (b) Betrachten Sie den Graphen  $\mathcal{G} = (\text{HF}, E)$  mit  $E = \{(x, y) \mid x \in y \text{ oder } y \in x\}$ .
  - (i) Welchen Durchmesser hat  $\mathcal{G}$ ?
  - (ii) Zeigen Sie, dass für alle paarweise verschiedenen  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \text{HF}$  ein  $z \in \text{HF}$  existiert, das in  $\mathcal{G}$  mit allen  $a_1, \dots, a_n$ , aber mit keinem  $b_1, \dots, b_m$  durch eine Kante verbunden ist.