Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

2. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Mittwoch, 29. Oktober um 12:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 6+2 Punkte

(a) Formalisieren Sie das Extensionalitätsaxiom (Ext) , Kreationsaxiom (Kre) und das Aussonderungsaxiom (Aus) als Sätze φ_{Ext}, φ_{Kre} bzw. Satzmenge Φ_{Aus} in $\text{FO}(\{\in\})$.

(b) Geben Sie ein unendliches Modell $(\mathbb{S}, \in)$ von $\Phi_{\text{Aus}} \cup \{\varphi_{\text{Ext}}\} \cup \{\neg\varphi_{\text{Kre}}\}$ an.

Aufgabe 2 (2 + 2) + 4 Punkte

(a) Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) Eine Klasse A ist genau dann erblich und transitiv, wenn $\text{acc}(A) = A$ ist.

(ii) Ist B eine erbliche und transitive Klasse und $A \subseteq B$, so gilt $\text{acc}(A) \subseteq B$.

(b) Sei $a \in \text{HF}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $a_0 := a$ und $a_{i+1} = \text{acc}(a_i)$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_{k+1} = a_k$ und zeigen Sie ferner, dass a_k erblich und transitiv ist.

Aufgabe 3 4 Punkte

Man zeige, dass die Klasse HF der hereditär endlichen Mengen sowie die Klasse $\mathbb{S} = \{x \mid x = x\}$ aller Mengen Limesstufen sind.

Aufgabe 4 3 + 4 + 6* Punkte

(a) Nach der Vorlesung ist jede Stufe erblich und transitiv. Geben Sie eine Menge an, die erblich und transitiv ist, die aber keine Stufe ist.

(b) Aus dem Kreationsaxiom folgt, dass zu einer beliebigen Menge x die Vereinigung $\bigcup x = \{z \in S(x) \mid \text{ es gibt ein } y \in x \text{ mit } z \in y\}$ existiert. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die Vereinigung beziehungsweise der Schnitt einer Menge von Stufen wieder eine Stufe ist. Zeigen oder widerlegen Sie ferner, dass die Vereinigung einer Menge von Geschichten wieder eine Geschichte ist.

(c)* Wir betrachten nun eine beliebige Menge x, die transitiv und unter $\in$ linear geordnet ist. Ein Anfangsstück von x ist eine transitive Teilmenge von x. Man zeige, dass eine Teilmenge $y \subseteq x$ genau dann ein Anfangsstück von x ist, wenn $y \in x$ oder $y = x$ ist.