Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

3. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Mittwoch, 5. November um 12:15 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 3 Punkte

Beweisen Sie, dass es unendlich viele paarweise nicht elementar äquivalente, abzählbare Modelle der ersten 4 Axiome der Mengenlehre gibt (Die ersten 4 Axiome der Mengenlehre sind: Extensionalitätsaxiom, Aussonderungsaxiom, Kreationsaxiom, Unendlichkeitsaxiom).
Hinweis: Unterscheiden Sie Modelle durch die Anzahl ihrer Limesstufen.

Aufgabe 2 1+2+2+2 Punkte

Geordnete Paare (x, y) von Mengen x und y können durch $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ definiert werden. Eine Formalisierung von Tripeln (x, y, z) als Mengen ist *adäquat*, wenn $(x, y, z) = (x', y', z')$ genau dann, wenn $x = x', y = y'$ und $z = z'$. Sind die folgenden Formalisierungen adäquat?

(a) $(x, y, z) = ((x, y), z)$

(b) $(x, y, z) = \{\{x, [0]\}, \{y, [1]\}, \{z, [2]\}\}$

(c) $(x, y, z) = \{x, \{y\}, \{\{z\}\}\}$

(d) $(x, y, z) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$

Aufgabe 3 (2+2+2)+3 Punkte

Seien $\mathcal{G} = (V, R)$, $\mathcal{H} = (W, S)$ zwei fundierte Graphen.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Graphen fundiert sind.

(i) $\mathcal{U}_1 = (V \times W, P_1)$ mit
$P_1 = \{((v_1, w_1), (v_2, w_2)) \mid (v_1, v_2) \in R \wedge (w_1, w_2) \in S\}$

(ii) $\mathcal{U}_2 = (V \times W, P_2)$ mit
$P_2 = \{((v_1, w_1), (v_2, w_2)) \mid (v_1 = v_2 \wedge (w_1, w_2) \in S) \vee ((v_1, v_2) \in R \wedge w_1 = w_2)\}$

(iii) $\mathcal{U}_3 = (V \times W, P_3)$ mit
$P_3 = \{((v_1, w_1), (v_2, w_2)) \mid (v_1, v_2) \in R \vee (v_1 = v_2 \wedge (w_1, w_2) \in S)\}$

(b) Welche der Graphen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ sind partielle (bzw. lineare) Ordnungen, falls $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ partielle (bzw. lineare) Ordnungen sind?

Aufgabe 4 3+3 Punkte

Sei A eine Klasse. Ein *Hüllenoperator* auf A ist eine Funktion $c : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, so dass für alle $x, y \in \mathcal{P}(A)$ gilt:

- $x \subseteq c(x)$,
- $c(c(x)) = c(x)$ und
- wenn $x \subseteq y$, dann $c(x) \subseteq c(y)$.

Sei $(A, \leq)$ eine partielle Ordnung. Eine *obere (bzw. untere) Schranke* einer Menge $X \subseteq A$ ist ein Element $a \in A$ mit $x \leq a$ (bzw. $a \leq x$) für alle $x \in X$. Wir definieren für Mengen $X \subseteq A$:

- $U(X) = \{a \in A \mid a \text{ ist eine obere Schranke für } X\}$ und
- $L(X) = \{a \in A \mid a \text{ ist eine untere Schranke für } X\}$.

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $c : X \mapsto L(U(X))$ ist ein Hüllenoperator auf A.

(b) Bildung der transitiven Hülle $\mathrm{TC} : X \mapsto \mathrm{TC}(X)$ ist ein Hüllenoperator auf A