Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

5. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Donnerstag, 20. November um 12:15 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 2+4 Punkte

Wir betrachten folgende Umformulierungen des Auswahlaxioms:

AC*: Zu jeder Menge x gibt es eine Auswahlfunktion auf $\mathcal{P}(x)$.

KP: Für jede Familie $(X_i)_{i\in I}$ von nicht-leeren Mengen ist das kartesische Produkt $\Pi_{i\in I}X_i$ nicht leer.

ÄR: Jede Äquivalenzrelation über einer Menge x besitzt ein Repräsentantensystem.

(a) Präzisieren Sie die in diesen Aussagen verwendeten Begriffe.

(b) Zeigen Sie, dass **AC***, **KP** und **ÄR** zum Auswahlaxiom äquivalent sind (auf der Basis von ZF).

Aufgabe 2 3+(2+3)+(3+4+3*) Punkte

Sei X eine Menge. Ein *Filter auf* X ist eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X, welche die folgenden Axiome erfüllt:

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}, X \in \mathcal{F}$

ii) Für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ gilt, wenn $A \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq B$, dann auch $B \in \mathcal{F}$

iii) Für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ gilt, wenn $A \in \mathcal{F}$ und $B \in \mathcal{F}$, dann auch $A \cap B \in \mathcal{F}$

Ein *Ultrafilter* $\mathcal{U}$ auf X ist ein inklusionsmaximaler Filter auf X, d.h. für jeden Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ gilt $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

(a) Sei $\mathcal{U}$ ein Filter auf X. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (i) $\mathcal{U}$ ist ein Ultrafilter auf X
   (ii) Für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ gilt $A \in \mathcal{U}$, genau dann, wenn $X \setminus A \notin \mathcal{U}$
   (iii) Für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ gilt $A \cup B \in \mathcal{U}$, genau dann, wenn $A \in \mathcal{U}$ oder $B \in \mathcal{U}$

(b) Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ wird *Hauptfilter* genannt, wenn es ein Element $a \in X$ gibt, so dass $\mathcal{U} = \{A \subseteq X \mid a \in A\}$ gilt. Ein Ultrafilter, der kein Hauptfilter ist, wird *frei* genannt.
   (i) Zeigen Sie, dass ein Ultrafilter genau dann frei ist, wenn $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$ gilt.
   (ii) Folgern Sie aus dem Auswahlaxiom, dass auf jeder unendlichen Menge X ein freier Filter existiert.

(c) Wir sagen, dass eine Mengenfamilie $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die *endliche Schnitteigenschaft* hat, wenn $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$ für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ gilt. Das Ultrafilter-Lemma (**UL**) besagt:

UL: Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Mengenfamilie auf X mit der endlichen Schnitteigenschaft, dann gibt es einen Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf X mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$.

Für die folgenden Aufgaben wird immer **ZF** (ohne Auswahlaxiom) vorausgesetzt.

(i) Zeigen Sie, dass **UL** aus dem Kompaktheitssatz der Aussagenlogik folgt.

In der Vorlesung "Mathematische Logik 1" wurde der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik unter der Voraussetzung bewiesen, dass das Lemma von Zorn (**ZL**) gilt, womit die vorherige Aufgabe also insbesondere auch impliziert, dass **UL** aus **ZL** folgt. Es ist bekannt, dass **UL** eine schwächere Voraussetzung als **ZL** ist, d.h. dass in **ZF** zwar **UL** aus **ZL** folgt, aber nicht umgekehrt. In der nächsten Aufgabe soll gezeigt werden, dass die schwächere Voraussetzung **UL** reicht um den Kompaktheitssatz zu beweisen.

(ii) Zeigen Sie, dass der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik aus **UL** folgt.

Anleitung: Sei Φ eine Menge von AL-Formeln über einer beliebigen Variablenmenge τ und $X := \{0,1\}^\tau$ die Menge aller τ-Interpretationen. Wenden Sie das Ultrafilter-Lemma auf die Mengenfamilie $\mathcal{E} = \{\mathrm{Mod}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}$ an. Zu einem Ultrafilter $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{U}$ auf X definiere nun die Interpretation $\mathcal{I}/\mathcal{U}$ durch $\mathcal{I}/\mathcal{U}(Y) = 1 \Leftrightarrow \{\mathcal{J} \in X \mid \mathcal{J}(Y) = 1\} \in \mathcal{U}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}/\mathcal{U}$ wohldefiniert ist und $\mathcal{I}/\mathcal{U} \models \Phi$ gilt, falls jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.

(iii)* Zeigen Sie, dass aus **UL** folgt, dass sich jede Menge linear ordnen läßt.

Aufgabe 3 3+4 Punkte

Es sei $\{0,1\}^\omega := \{f \mid f : \omega \to \{0,1\} \text{ ist eine Funktion}\}$ die Menge der unendlichen Bitsequenzen. Eine Menge $X \subseteq \{0,1\}^\omega$ ist eine *Flippmenge*, falls für je zwei Bitsequenzen, die sich an genau einer Stelle unterscheiden, genau eine der beiden Bitsequenzen in der Menge ist, d.h. genau dann, wenn für alle $f, g \in \{0,1\}^\omega$ mit $|\{i \in \omega \mid f(i) \neq g(i)\}| = 1$ gilt $f \in X \Leftrightarrow g \notin X$ gilt.

(a) Folgern Sie aus dem Auswahlaxiom die Existenz einer Flippmenge.

(b) Sei $X \subseteq \{0,1\}^\omega$. Wir betrachten das folgende unendliche Zwei-Personen-Spiel: In der i-ten Runde ($i \in \omega$) wählt Spieler 0 eine endliche Bitsequenz $w_i \in \{0,1\}^+$ woraufhin Spieler 1 mit einer endlichen Bitsequenz $v_i \in \{0,1\}^+$ antwortet. Wenn die unendliche Bitsequenz $w_0v_0w_1v_1w_2v_2\dots$ in X liegt, so gewinnt Spieler 0, ansonsten gewinnt Spieler 1. Beide Spieler haben perfekte Information, d.h. sie können jeweils sehen, welche Züge bereits gemacht wurden. Eine *Strategie* s für Spieler 0 (bzw. Spieler 1) ist eine Funktion, die ihm zu jeder bereits gespielten Zugfolge $w_0, v_0 \dots, w_i, v_i$ (bzw. $w_0, v_0, \dots, w_i$) den nächsten Zug $s(w_0, v_0, \dots, w_i, v_i) = w_{i+1}$ (bzw. $s(w_0, v_0, \dots, w_i) = v_i$) angibt. Zusätzlich gibt eine Strategie s für Spieler 0 auch den allerersten Zug $s(\emptyset) = w_0$ an. Eine Strategie s ist eine *Gewinnstrategie*, wenn für alle Strategien t des Gegners die gemäß s und t gespielte, eindeutige Partie $\pi(s,t) = w_0v_0w_1v_1\dots$ mit $w_0 := s(\emptyset)$, $w_{i+1} := s(w_0, v_0, \dots, w_i, v_i)$, $v_i := t(w_0, \dots, w_i)$ für alle $i \in \omega$, in X (bzw. nicht in X) liegt.

(i) Zeigen Sie, dass keiner der Spieler eine Gewinnstrategie hat, wenn X eine Flippmenge ist.

Tipp: Zeigen Sie, dass es zu jeder Strategie s des einen Spielers zwei Strategien t, t' des anderen Spielers gibt, so dass entweder t oder t' die Strategie s besiegt.

Aufgabe 4* 5*+5* Punkte

In Schlumpfhausen sind zur alljährlichen Schlumpfparty abzählbar unendlich viele Schlümpfe eingetroffen. Dies ist leider auch dem Hexenmeister Gargamel nicht entgangen, der den Schlümpfen vor Schlumpfhausen aufgelauert , sie alle in seinen Sack gepackt und in seine Hexenstube gebracht hat, wo schon ein Kessel mit kochendem Wasser bereitsteht. Gargamel hat sich ein böses Spiel für die Schlümpfe ausgedacht: Die Schlümpfe sollen sich in eine Reihe stellen, dann wird er mit einem Zauberspruch die Farbe der Zipfelmütze jedes Schlumpfs verändern, so dass jeder entweder eine rote oder eine weiße Zipfelmütze aufhat. Daraufhin muss der Reihe nach jeder Schlumpf die Farbe seiner Zipfelmütze raten. Allerdings sieht jeder Schlumpf immer nur die Zipfelmützen der unendlich vielen Schlümpfe die vor ihm stehen, nicht jedoch seine eigene oder die der endlich vielen, die hinter ihm stehen. Jeder Schlumpf, der eine falsche Antwort gibt, wird in den Kessel geworfen; diejenigen die richtig raten, dürfen wieder nach Hause gehen.

(a) Helfen Sie den Schlümpfen aus der Patsche indem sie sich eine Strategie ausdenken, welche die Schlümpfe befolgen können, so dass zumindest immer nur höchstens endlich viele Schlümpfe falsch raten, unabhängig davon, wie Gargamel die Zipfelmützenfarben festlegt. Sie können davon ausgehen, dass in Schlumpfhausen alle Axiome von ZFC gelten und außerdem die Schlümpfe in der Lage sind, mit unendlichen Mengen umzugehen.

(b) Die Schlümpfe sind noch nicht ganz zufrieden damit, dass höchstens endlich viele von ihnen in den Kessel kommen. Können Sie auch eine Strategie angeben, so dass immer nur höchstens ein Schlumpf falsch rät?