Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

6. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Donnerstag, 27. November um 12:15 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 2+4 Punkte

(a) Sei $X \subset \mathrm{Cn}$ eine Menge von Kardinalzahlen. Beweisen Sie, dass $\sup X = \bigcup X$ eine Kardinalzahl ist.

(b) Es sei X eine Menge mit $|X| \leq \kappa$ für ein $\kappa \in \mathrm{Cn}^\infty$ und es gelte $|y| \leq \kappa$ für alle $y \in X$. Zeigen Sie, dass $|\bigcup X| \leq \kappa$ ist.

Aufgabe 2 4 Punkte

Sei X eine unendliche Menge und λ eine Kardinalzahl mit $\lambda \leq |X|$.
Zeigen Sie, dass $|\{A \subseteq X \mid |A| = \lambda\}| = |X|^\lambda$ gilt.

Aufgabe 3 3 Punkte

Geben Sie eine Ordinalzahl α an, so dass $\aleph_\alpha > 2^{\aleph_0}$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\aleph_\alpha \geq \alpha$ für jede Ordinalzahl α gilt.

Aufgabe 4 $5^* + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 5^*$ Punkte

Sei A eine Menge und sei $\leq$ eine lineare Ordnung auf A. Eine Teilmenge X von A heißt *kofinal in* A, wenn für jedes $a \in A$ ein $x \in X$ existiert, so dass $a \leq x$ gilt. Sei α eine Ordinalzahl. Die Kofinalität $\mathrm{cf}(\alpha)$ von α ist die kleinste Ordinalzahl, so dass eine Abbildung $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ existiert, deren Bild in α nicht beschränkt ist. (Das heißt für alle $\gamma \in \alpha$ gibt es ein $\delta \in \mathrm{cf}(\alpha)$, so dass $f(\delta) \geq \gamma$ ist.) Eine Ordinalzahl α heißt regulär, falls α Limesordinalzahl ist und $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ gilt.

(a*) Zeigen Sie, dass jede lineare Ordnung $(A, \leq)$ eine kofinale wohlgeordnete Teilmenge besitzt.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{cf}(\alpha)$ für $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega \cdot 2$ und für jede Nachfolgerordinalzahl α.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cf}(\alpha)$ für Limesordinale α selbst wieder ein Limesordinal ist.

(d) Zeigen Sie, dass es für jedes $\alpha \in \mathrm{On}$ eine streng monoton wachsende Funktion $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ gibt, die in α unbeschränkt ist.

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$ gilt für alle $\alpha \in \mathrm{On}$.

(f) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cf}(\alpha) \in \mathrm{Cn}$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt.

(g) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$ gilt.

(h*) Zeigen Sie, dass alle Nachfolgerkardinalzahlen regulär sind.