Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

7. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Donnerstag, 4. Dezember um 12:15 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 2 Punkte

Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine rekursiv axiomatisierbare Theorie. Zeigen Sie, dass T genau dann entscheidbar ist, wenn die Menge der Sätze $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ für die $T \cup \{\varphi\}$ konsistent ist rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 2 3+2+5 Punkte

(a) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem. Zeigen Sie, dass $\Phi^{\models}$ bereits rekursiv axiomatisierbar ist.
Hinweis: Geben Sie ein zu Φ äquivalentes Axiomensystem Φ' an, dessen Sätze der Länge nach strikt aufsteigend sortiert werden können.

(b) Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine entscheidbare Theorie und $\Phi_0 \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ endlich. Zeigen Sie, dass $(T \cup \Phi_0)^{\models}$ entscheidbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass es zu jeder entscheidbaren Theorie $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine entscheidbare vollständige Theorie $T' \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ mit $T' \supseteq T$ gibt.

Aufgabe 3 2+2+4 Punkte

(a) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine erfüllbare Satzmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Zeigen Sie, dass Φ für alle $\kappa \in \mathrm{Cn}^{\infty}$ mit $\kappa \geq |\tau|$ ein Modell der Mächtigkeit κ hat.
Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis des Satzes von Löwenheim-Skolem vor.

(b) Sei $\kappa \in \mathrm{Cn}^{\infty}$. Eine Theorie T heißt *κ-kategorisch,* falls sie bis auf Isomorphie genau ein Modell der Kardinalität κ besitzt. Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine Theorie mit folgenden Eigenschaften:

   (i) Alle Modelle von T sind unendlich.

   (ii) Es gibt ein $\kappa \in \mathrm{Cn}^{\infty}$ mit $\kappa \geq |\tau|$, so dass T κ-kategorisch ist.

   Zeigen Sie, dass T vollständig ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte (d.h. ohne Maximum und Minimum) ω-kategorisch ist.