Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

8. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Donnerstag, 11. Dezember um 16:15 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 3 Punkte

Sei Φ ein konsistentes Axiomensystem, das rekursiv aufzählbar und repräsentativ ist. Zeigen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{N}$ genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn es eine Formel $\varphi(x)$ gibt, so dass $n \in M \Leftrightarrow \Phi \vdash \varphi(t_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folgern Sie, dass $\Phi^{\models}$ unentscheidbar ist.

Aufgabe 2 3+4+3 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass jedes Modell von Φ_{PA} eine zu $\mathfrak{N}$ isomorphe Substruktur hat.

(b) Eine Σ_1^0-Formel ist eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau_{\mathrm{ar}})$ der Form $\varphi = \exists \overline{x} \psi$ für ein ψ, so dass in ψ keine anderen Quantoren vorkommen, als relativierte Quantoren der Art $(\exists i.i < t)$ und $(\forall i.i < t)$ für Variablen i und τ_{ar}-Terme t, so dass i nicht in t vorkommt. Zeigen Sie, dass für jede Σ_1^0-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ und alle $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Phi_{PA} \vdash \varphi(n_1, \dots, n_k) \Leftrightarrow \mathfrak{N} \models \varphi(n_1, \dots, n_k)$$

(c) Geben Sie eine Σ_1^0-Formel $\varphi_f(x_1, x_2)$ an, welche die Funktion $f(n) = n!$ in Φ_{PA} repräsentiert.

Hinweis: Benutzen Sie Gödel's β-Funktion.

Aufgabe 3 3 + 3 Punkte

Wir definieren eine Folge $(\Phi_i)_{i \in \omega}$ von Erweiterungen der Peano-Arithmetik durch

(1) $\Phi_0 = \Phi_{PA}$,

(2) $\Phi_{i+1} = \Phi_i \cup \{\mathrm{Cons}_{\Phi_i}\}$,

(3) $\Phi_\omega = \bigcup_{i<\omega} \Phi_i$,

wobei Φ_{PA} das Axiomensystem der Peano-Arithmetik ist.

(a) Zeigen Sie, dass Φ_ω konsistent ist.

(b) Lösen Sie folgendes Paradoxon. Wir erweitern die Folge durch:

(2′) $\Phi_{\alpha+1} = \Phi_\alpha \cup \{\mathrm{Cons}_{\Phi_\alpha}\}$,

(3′) $\Phi_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Phi_\alpha$ für Limesordinale λ.

Da es nur abzählbar viele Formeln gibt, existiert ein Fixpunkt Φ_∞ der Folge $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{On}}$, also $\Phi_\infty = \Phi_\infty \cup \{\mathrm{Cons}_{\Phi_\infty}\}$. Dann gilt $\Phi_\infty \vdash \mathrm{Cons}_{\Phi_\infty}$ im Widerspruch zum zweiten Gödelschen Satz.

Aufgabe 4* 5* Punkte

Zwei Mengen A, B mit $A \cap B = \emptyset$ heißen *rekursiv untrennbar*, falls es keine rekursive Menge C mit $A \subseteq C$ und $B \cap C = \emptyset$ gibt. Sei Φ ein konsistentes Axiomensystem, das repräsentativ ist. Zeigen Sie, dass die Mengen $\Phi^+ := \Phi^{\models} = \{\varphi \mid \Phi \models \varphi\}$ und $\Phi^- := \{\varphi \mid \Phi \models \neg\varphi\}$ rekursiv untrennbar sind.
Hinweis: Verwenden Sie den Fixpunktsatz.