Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

10. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Donnerstag, 8. Januar um 16:15 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 3 Punkte

Folgern Sie aus dem in der Vorlesung bewiesenen Satz von Łos-Tarski die folgende schwächere Variante des Satzes von Łos-Tarski:
Sei $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ein Satz. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{A}$ ist, dann gilt auch $\mathfrak{B} \models \varphi$.
(“φ bleibt unter Substrukturen erhalten”)

ii) Es gibt $\psi = \forall \overline{x} \vartheta(\overline{x}) \in \mathrm{FO}(\tau)$, mit $\vartheta(\overline{x})$ quantorenfrei, so dass $\varphi \equiv \psi$ gilt.
(“φ is äquivalent zu einem Π_1-Satz”)

Aufgabe 2 2+2+2 Punkte

Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$, P die Menge aller Primzahlen und für jede Teilmenge $X \subseteq P$ sei $\Phi_X = \{\varphi_p(x) \,|\, p \in X\} \cup \{\neg\varphi_p(x) \,|\, p \in P \backslash X\}$. Dabei sei für jedes $p \in P$ die Formel $\varphi_p(x) \in FO(\{+, \cdot\})$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ genau dann $\mathfrak{N} \models \varphi_p(k)$ gilt, wenn p ein Teiler von k ist. Ferner sei $\varphi_{\text{prim}}(x) \in FO(\{+, \cdot\})$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ genau dann $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{prim}}(k)$ gilt, wenn $k \in P$ ist.

(a) Für welche $X \subseteq P$ ist Φ_X ein Typ von $\mathfrak{N}$ über $\emptyset$?

(b) Für welche $X \subseteq P$ ist Φ_X in $\mathfrak{N}$ realisiert?

(c) Zeigen Sie, dass es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$ gibt, die eine Nicht-Standard-Primzahl p^* enthält. (Das heißt $\mathfrak{M} \models \varphi_{\text{prim}}(p^*)$ und $p^* \notin \mathbb{N}$.)

Aufgabe 3 3+4+4 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ Struktur und sei $B \subseteq A$. Ein n-Typ p von $\mathfrak{A}$ über B ist ein *Haupttyp*, wenn eine Formel $\varphi(\bar{x}) \in p$ existiert, so dass $\mathfrak{A}_B \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x}))$ für alle $\psi(\bar{x}) \in p$.

(a) Sei p ein vollständiger Typ von $\mathfrak{A}$ über B, welcher durch ein Tupel $\bar{b} \subseteq B$ realisiert ist. Zeigen sie, dass p ein Haupttyp ist.

(b) Zeigen sie, dass alle Haupttypen von $\mathfrak{A}$ über B in $\mathfrak{A}$ realisiert sind.

(c) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Beweisen sie, dass $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ gilt genau dann, wenn alle Haupttypen von $\mathfrak{B}$ über A in $\mathfrak{A}$ realisiert sind.