Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

11. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Donnerstag, 15. Januar um 16:15 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 3 Punkte

Zeigen Sie, dass jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ eine ω-saturierte elementare Erweiterung $\mathfrak{B}$ hat.

Hinweis: Konstruieren Sie $\mathfrak{B}$ mittels einer elementaren Kette. Benutzen Sie hierzu den in der Vorlesung bewiesenen Satz, dass jede Struktur $\mathfrak{C}$ eine elementare Erweiterung $\mathfrak{C} \preceq \mathfrak{D}$ hat, in der alle Typen von $\mathfrak{C}$ realisiert werden.

Aufgabe 2 2+2+2+2+2 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Strukturen ω-saturiert sind.

(a) jede endliche Struktur

(b) $(\mathbb{Z}, <)$

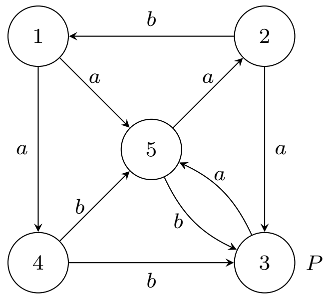
(c) $(\mathbb{Q}, <)$

(d) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, <)$ mit $(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b < d)$

(e) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, <)$ mit $<$ wie bei (d).

Aufgabe 3 1+1+1+1 Punkte

Sei $\tau = \{E_a, E_b, P\}$ eine Signatur und $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ das folgende Transitionssystem:



Berechnen Sie für jede der folgenden ML-Formen ψ die Extension $[\![\psi]\!]^{\mathcal{K}} := \{v \in V \mid \mathcal{K}, v \models \psi\}$

(i) $\psi_1 := [b]P$

(ii) $\psi_2 := [b]\langle a\rangle 0$

(iii) $\psi_3 := \langle a\rangle(P \vee [b]0)$

(iv) $\psi_4 := [a]\langle b\rangle[b]\langle a\rangle 1$

Aufgabe 4 1+1+1 Punkte

Geben Sie zu den folgenden FO-Formeln $\varphi(x)$ jeweils eine äquivalente ML-Formel an, oder beweisen Sie, dass eine solche Formel nicht existiert:

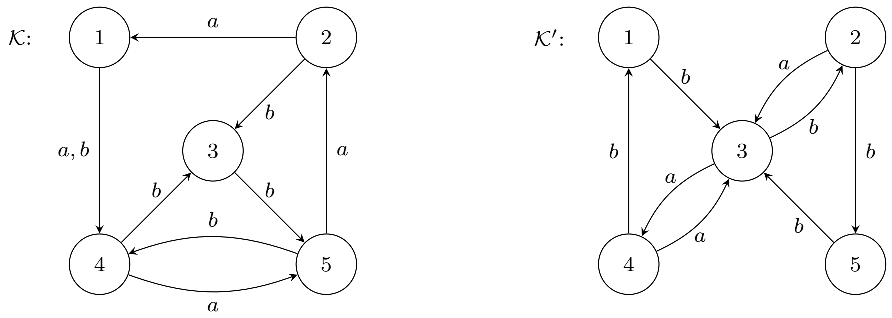
(i) $\varphi_1(x) := \forall y \exists z (Exy \vee Eyz)$;

(ii) $\varphi_2(x) := \forall y \exists z (\neg Exy \vee Eyz)$;

(iii) $\varphi_3(x) := \exists y \forall z (Eyx \wedge Eyz \wedge Pz)$.

Aufgabe 5 2+6+2 Punkte

Wir betrachten die folgenden Transitionssysteme $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$:



(a) Für welche Paare von Zuständen v in $\mathcal{K}$ und Zuständen v' in $\mathcal{K}'$ gilt $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$?

(b) Geben Sie für alle Paare, wo dies nicht der Fall ist, die größte Zahl m an, so dass $\mathcal{K}, v \sim_m \mathcal{K}', v'$ gilt, und konstruieren Sie eine ML-Formel ψ der Modaltiefe $m+1$ mit $\mathcal{K}, v \models \psi$ und $\mathcal{K}', v' \not\models \psi$.

(c) Geben Sie eine FO-Formel $\varphi(x)$ an, so dass $\mathcal{K} \models \varphi(2)$ und $\mathcal{K}' \not\models \varphi(2)$.