

## 11. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Donnerstag, 22. Januar um 16:15 Uhr am Lehrstuhl.

### Aufgabe 1

3 Punkte

Zeigen Sie, dass jede Klasse endlicher Strukturen in  $L_{\infty\omega}$  axiomatisierbar ist.

### Aufgabe 2

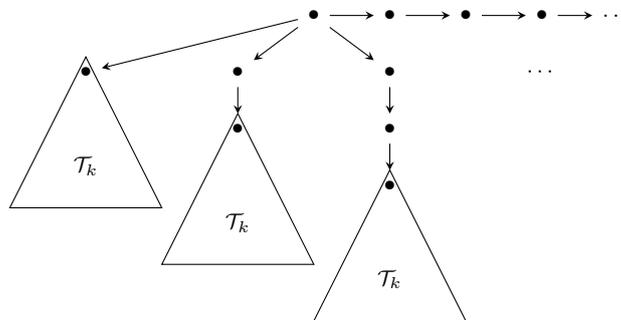
3 Punkte

Geben Sie die kleinste Kardinalzahl  $\kappa$  an, so dass die Klasse aller zu  $(\mathbb{Z}, <)$  isomorphen  $<$ -Strukturen in  $L_{\kappa\omega}(<)$  axiomatisierbar ist oder beweisen Sie, dass keine solche Kardinalzahl existiert.

### Aufgabe 3

4 Punkte

Für  $k = 1, 2, \dots$  definieren wir den gerichteten Baum  $\mathcal{T}_k$  mit Wurzel induktiv.  $\mathcal{T}_1$  besteht aus disjunkten endlichen Pfaden der Längen jeweils  $1, 2, 3, \dots$ , die von der Wurzel ausgehen. Für  $k > 1$  entsteht  $\mathcal{T}_{k+1}$  aus  $\mathcal{T}_1$ , indem man jedes Blatt durch die Wurzel des Baumes  $\mathcal{T}_k$  ersetzt. Entstehe ferner  $\mathcal{T}'_k$  aus  $\mathcal{T}_k$  durch Anhängen eines unendlichen Pfades an die Wurzel. Geben Sie die kleinste Ordinalzahl  $\alpha$  an, so dass  $I_\alpha(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}'_k) = \emptyset$  oder beweisen Sie, dass keine solche Ordinalzahl existiert.



### Aufgabe 4

4 Punkte

Sei  $\tau$  eine endliche relationale Signatur. Seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  zwei  $\tau$ -Strukturen mit  $\mathfrak{A} \cong_\infty \mathfrak{B}$ . Ferner existiere ein zweistelliges Relationssymbol  $R \in \tau$ , so dass  $R^{\mathfrak{A}}$  eine Wohlordnung ist. Zeigen Sie, dass dann auch  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$  gilt.

### Aufgabe 5\*

5\*+5\* Punkte

Für zwei lineare Ordnungen  $(A, <)$  und  $(B, <)$  sei  $(A, <) \cdot (B, <) := (A \times B, <)$  mit  $(a, b) < (a', b')$  genau dann, wenn  $b < b'$  oder  $b = b'$  und  $a < a'$ . (Intuitiv gesprochen besteht also  $(A, <) \cdot (B, <)$  aus  $B$  vielen isomorphen Kopien von  $A$ , linear hintereinander geschrieben.) Für  $0 < n < \omega$  sei  $(A, <)^n$  definiert durch  $(A, <)^1 = (A, <)$  und  $(A, <)^{n+1} = (A, <)^n \cdot (A, <)$ .

- (a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $n$  die kleinste Ordinalzahl  $\alpha$ , so dass I eine Gewinnstrategie für das Spiel  $G_\alpha((\mathbb{Z}, <)^n, (\mathbb{Z}, <)^{n+1})$  hat und geben Sie eine solche Strategie für I an.
- (b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $n$  die kleinste Ordinalzahl  $\alpha$ , so dass I eine Gewinnstrategie für das Spiel  $G_\alpha((\omega, <)^n, (\omega, <)^{n+1})$  hat und geben Sie eine solche Strategie für I an.