Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

14. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Donnerstag, 5. Februar um 16:15 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 2+2 Punkte

Sei $\mathcal{K} = (V, E, P)$ eine Kripkestruktur und $v \in V$. Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften in L_μ.

(a) Auf allen Pfaden von v aus gilt nur endlich oft P.

(b) Die Request-Response-Bedingung : Von jedem von v aus erreichbaren Knoten, an dem P gilt, ist ein Knoten erreichbar, an dem Q gilt.

Aufgabe 2 2+1 Punkte

Betrachten Sie die Kripkestruktur $\mathcal{K} = (\{a,b\}^\omega, E_a^\mathcal{K} := \{(aw, w) \in V^2 \mid w \in \{a,b\}^\omega\}, E_b^\mathcal{K} := \{(bw, w) \in V^2 \mid w \in \{a,b\}^\omega\})$ und die beiden L_μ-Formeln $\varphi_1 := \nu Y.\mu X.[a]Y \wedge [b]X$ und $\varphi_2 := \mu X.\nu Y.[a]Y \wedge [b]X$.

(a) Berechnen Sie die Sprachen $L_i := \{w \in \{a,b\}^\omega \mid \mathcal{K}, w \models \varphi_i\}$ für $i = 1, 2$.

(b) Gilt $\varphi_1 \models \varphi_2$ oder $\varphi_2 \models \varphi_1$?

Aufgabe 3 3+4 Punkte

Konstruieren Sie für $i = 1, 2$ Sätze $\varphi_i \in \text{LFP}$ über der Signatur $\tau = \{E\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol E, so dass für alle endlichen ungerichteten Graphen $G = (V, E^G)$ genau dann $G \models \varphi_i$ gilt, wenn G die Eigenschaft (i) hat.

(1) G ist ein Baum, das heißt G ist zusammenhängend und hat keine Kreise.

(2) G ist bipartit, das heißt es gibt eine Partition $V = V_1 \cup V_2$ der Knotenmenge von G, so dass es keine Kante $(u, v) \in E$ gibt mit $u, v \in V_i$ für ein $i \in \{1, 2\}$.

Aufgabe 4 3+4 Punkte

(a) Geben Sie eine LFP-Formel $\varphi(x, y, z)$ über der Signatur $\{E\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol E an, so dass für jeden Graphen $G = (V, E^G)$ und alle Knoten $a, b, c \in V$ genau dann $G \models \varphi(a, b, c)$ gilt, wenn die Längen der kürzesten Pfade von a nach b und von a nach c gleich sind.

(b) Ein *Schaltkreis* ist gegeben durch ein Tupel $(V, E, P_\vee, P_\neg, I_0, I_1, \text{out})$, wobei (V, E) ein gerichteter azyklischer Graph mit Wurzel out ist und $P_\vee$, $P_\neg$, I_0 und I_1 disjunkte Teilmengen von V sind. $P_\vee$ ist die Menge der OR-Gatter mit jeweils zwei Vorgängern, $P_\neg$ ist die Menge der NOT-Gatter mit jeweils einem Vorgänger. I_0 und I_1 sind die Mengen der Eingänge mit Werten 1 bzw. 0, die keine Vorgänger haben; out ist der Ausgang, der keine Nachfolger hat. Geben Sie einen LFP-Satz an, welcher besagt, dass am Ausgang der Wert 1 anliegt.

Für die nächsten Aufgaben benötigen wir folgende Definitionen.

Es sei τ eine Signatur und $\mathcal{R}$ sei eine Menge von Relationsvariablen R mit $\mathcal{R} \cap \tau = \emptyset$. Die Logik PFP($\tau$) wird analog zur Logik LFP(τ) definiert. Statt die Formeln $[\mathrm{lfp}\, R\overline{x}\psi](\overline{t})$ und $[\mathrm{gfp}\, R\overline{x}\psi](\overline{t})$ einzuführen, führen wir Formeln $[\mathrm{pfp}\, R\overline{x}\psi](\overline{t})$ ein.

Die Semantik solcher Formeln ist folgende. Die Formel $\psi \in \mathrm{PFP}(\tau)$ definiert für eine gegebene Struktur $\mathfrak{A}$ einen Operator $\psi_R^{\mathfrak{A}} : \mathcal{P}(A^k) \to \mathcal{P}(A^k)$ (wie bei LFP) und damit eine Fixpunktiteration $R^0, R^1, \ldots$ mit $R^0 = \emptyset$. Der *partielle Fixpunkt* $\mathrm{pfp}(\psi_R^{\mathfrak{A}})$ des Operators $\psi_R^{\mathfrak{A}}$ ist wie folgt definiert. Wenn die Folge einen Fixpunkt $R^m = R^{m+1}$ erreicht, ist $\mathrm{pfp}(\psi_R^{\mathfrak{A}}) = R^m$. Wenn kein Fixpunkt erreicht wird, ist $\mathrm{pfp}(\psi_R^{\mathfrak{A}}) = \emptyset$. Die Formel $[\mathrm{pfp}\, R\overline{x}\psi](\overline{t})$ gilt genau dann, wenn $\overline{t}^{\mathfrak{A}} \in \mathrm{pfp}(\psi_R^{\mathfrak{A}})$ ist.

Aufgabe 5* 3^* Punkte

Conway's Spiel LIFE wird auf einem ungerichteten Graphen gespielt. Zu Beginn sind bestimmte Knoten mit Steinen belegt. In jedem Schritt wird folgende Regel simultan auf alle Knoten angewand: Ein belegter (unbelegter) Knoten bleibt (wird) belegt genau dann, wenn er 2 oder 3 (genau 3) belegte Nachbarknoten besitzt.

Geben Sie einen Satz in PFP mit Signatur $\{E, P\}$ an (E die Kantenrelation des Graphen und P die Menge der Knoten in der Anfangskonfiguration), welcher besagt, dass das Spiel mit dieser Anfangskonfiguration schließlich stationär wird.

Aufgabe 6* 8^* Punkte

(a) Geben Sie eine PFP-Formel $\varphi(R, x)$ über der Signatur $\{<\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol $<$ an, so dass für jede lineare Ordnung $\mathfrak{A} = (A, <)$ die Fixpunktinduktion des zu φ gehörenden Fixpunktoperators $\varphi_R^{\mathfrak{A}}$ stationär wird, aber erst nach exponentiell vielen Schritten (in der Anzahl der Elemente von A).
Hinweis: Konstruieren Sie die Formel so, dass die Fixpunktiteration alle Teilmengen von A in einer geeigneten Ordnung durchläuft.

(b) Zeigen Sie, dass auf endlichen geordneten Strukturen jede MSO-Formel zu einer PFP-Formel äquivalent ist.
Hinweis: Verwenden Sie die Formel aus (a).