Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

Musterlösung 5.Übung Mathematische Logik II

Lösung zu Aufgabe 2 (c) (i)

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge welche die endliche Schnitteigenschaft hat. Wir zeigen, dass aus dem Kompaktheitssatz der Aussagenlogik die Existenz eines Ultrafilters $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{E}$ folgt. Sei dazu $\tau := \{Y_A \mid A \in \mathcal{P}(X)\}$ eine Menge von AL-Variablen. Dann läßt sich jeder τ-Interpretation $\mathcal{I}\colon \tau \to \{0,1\}$ die Menge $\widehat{\mathcal{I}} := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{I}(Y_A) = 1\}$ zuordnen. Wir geben eine Menge Φ von AL(τ)-Formeln an, die ausdrücken soll, dass $\widehat{\mathcal{I}}$ ein Ultrafilter ist, der Obermenge von $\mathcal{E}$ ist. Φ besteht aus folgenden Formeln:

$$\Phi_{filter} := \{Y_X \wedge \neg Y_\emptyset\} \cup \{Y_A \to Y_B \mid A \subseteq B \in \mathcal{P}(X)\} \cup \{Y_A \wedge Y_B \to Y_{A\cap B} \mid A, B \in \mathcal{P}(X)\}$$

$$\Phi_{ultra} := \Big\{Y_A \vee Y_{X\setminus A} \mid A \in \mathcal{P}(X)\Big\}$$

$$\Phi_{\supseteq\mathcal{E}} := \{Y_A \mid A \in \mathcal{E}\}$$

Dann gilt wie man leicht nachprüft:

$\mathcal{I} \models \Phi_{filter} \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{I}}$ ist ein Filter

$\mathcal{I} \models \Phi_{ultra} \cup \Phi_{filter} \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{I}}$ ist ein Ultrafilter

$\mathcal{I} \models \Phi_{\supseteq\mathcal{E}} \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{I}} \supseteq \mathcal{E}$

Es reicht also zu zeigen, dass $\Phi := \Phi_{ultra} \cup \Phi_{filter} \cup \Phi_{\supseteq\mathcal{E}}$ ein Modell hat. Aus dem Kompaktheitssatz der AL folgt die Existenz eines Modells von Φ bereits dann, wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist, was wir deshalb im Folgenden nachweisen wollen. Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$ eine endliche Teilmenge und $\tau_0 \subseteq \tau$ die Menge der endlich vielen Variablen, die in Φ_0 vorkommen. Seien $Y_{A_1}, \dots, Y_{A_m}$ diejenigen Variablen aus τ_0 für die $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{E}$ gilt und $Y_{B_1}, \dots, Y_{B_r}$ die restlichen Variablen aus τ_0. Wegen der endlichen Schnitteigenschaft gilt $S := \bigcap_{i=1}^m A_i \neq \emptyset$. Wegen $S = S \cap X = S \cap \bigcap_{i=1}^r (B_i \cup X \setminus B_i) = \bigcup \Big\{S \cap \bigcap_{j=1}^r D_j \mid (D_1, \dots, D_r) \in \prod_{i=1}^r \{B_i, X \setminus B_i\}\Big\}$, gibt es dann auch ein $(D_1, \dots, D_r) \in \prod_{i=1}^r \{B_i, X \setminus B_i\}$ mit $T := S \cap \bigcap_{j=1}^r D_j \neq \emptyset$. Dann ist $\mathcal{F}_T := \{C \subseteq X \mid T \subseteq C\}$ ein Filter, weshalb die dazugehörige τ-Interpretation $\mathcal{I}_T$ mit $\mathcal{I}_T(Y_C) = 1 \Leftrightarrow C \in \mathcal{F}_T$ schon mal $\mathcal{I}_T \models \Phi_0 \cap \Phi_{filter}$ erfüllt. Da $T \subseteq A_1, \dots, A_m$ und somit $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{F}_T$ gilt, haben wir zudem $\mathcal{I}_T \models \Phi_0 \cap \Phi_{\supseteq\mathcal{E}}$, sowie $\mathcal{I}_T \models Y_{A_i} \vee Y_{X\setminus A_i}$ für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$. Da $T \subseteq D_1, \dots, D_r$ und somit $D_1, \dots, D_r \in \mathcal{F}_T$ gilt, haben wir auch $\mathcal{I}_T \models Y_{B_j} \vee Y_{X\setminus B_j}$ für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$, also insgesamt $\mathcal{I}_T \models \Phi_0 \cap \Phi_{ultra}$, womit $\mathcal{I}_T$ also ein Modell von $\Phi_0 = (\Phi_0 \cap \Phi_{filter}) \cup (\Phi_0 \cap \Phi_{\supseteq\mathcal{E}}) \cup (\Phi_0 \cap \Phi_{ultra})$ ist. □

Lösung zu Aufgabe 2 (c) (ii)

Wie in der Anleitung angegeben, seien τ eine Variablenmenge, $\Phi \subseteq \mathrm{AL}(\tau)$, $X := \{0,1\}^\tau$ die Menge der τ-Interpretationen und $\mathcal{E} = \{\mathrm{Mod}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Angenommen es gilt **UL** und jede endliche Teilmenge von Φ hat ein Modell. Wir müssen zeigen, dass dann auch Φ

ein Modell hat. Um **UL** anwenden zu können, weisen wir zunächst nach, dass $\mathcal{E}$ die endliche Schnitteigenschaft hat: Seien also $\mathrm{Mod}(\varphi_1), \dots, \mathrm{Mod}(\varphi_n) \in \mathcal{E}$, dann hat die endliche Teilmenge $\Phi_0 := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \Phi$ nach Voraussetzung ein Modell $\mathcal{I}$, d.h. $\mathcal{I} \in \mathrm{Mod}(\Phi_0)$. Also ist $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Mod}(\varphi_i) = \mathrm{Mod}(\Phi_0)$ nicht leer. Aus **UL** folgt somit die Existenz eines Ultrafilter $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{E}$. Wir betrachten die in der Anleitung angegebene Interpretation $\mathcal{I}/\mathcal{U}$, welche durch $\mathcal{I}/\mathcal{U}(Y) = 1 \Leftrightarrow \{\mathcal{J} \in X \mid \mathcal{J}(Y) = 1\} = \mathrm{Mod}(Y) \in \mathcal{U}$ definiert ist. Die Wohldefiniertheit ist klar, da entweder $\mathrm{Mod}(Y) \in \mathcal{U}$ oder $\mathrm{Mod}(Y) \notin \mathcal{U}$ gilt, aber nicht beides gleichzeitig. Per Induktion über den Formelaufbau zeigen wir nun, dass für jedes $\varphi \in \mathrm{AL}(\tau)$ gilt: $\mathcal{I}/\mathcal{U} \models \varphi \Leftrightarrow \mathrm{Mod}(\varphi) \in \mathcal{U}$.

- $\varphi = Y$.

  Dann gilt $\mathcal{I}/\mathcal{U} \models Y \Leftrightarrow \mathrm{Mod}(Y) \in \mathcal{U}$ nach Definition von $\mathcal{I}/\mathcal{U}$.

- $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$.

  Dann gilt $\mathcal{I}/\mathcal{U} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{U} \models \varphi_1$ oder $\mathcal{I}/\mathcal{U} \models \varphi_2 \Leftrightarrow \mathrm{Mod}(\varphi_1) \in \mathcal{U}$ oder $\mathrm{Mod}(\varphi_2) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathrm{Mod}(\varphi_1) \cup \mathrm{Mod}(\varphi_2) = \mathrm{Mod}(\varphi_1 \vee \varphi_2) \in \mathcal{U}$.

- $\varphi = \neg\varphi_1$.

  Dann gilt $\mathcal{I}/\mathcal{U} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{U} \not\models \varphi_1 \Leftrightarrow \mathrm{Mod}(\varphi_1) \notin \mathcal{U} \Leftrightarrow X \setminus \mathrm{Mod}(\varphi_1) = \mathrm{Mod}(\neg\varphi_1) \in \mathcal{U}$.

Hierbei wurden die Ultrafiltereigenschaften (*ii*) und (*iii*) aus Aufgabe 2(a) verwendet. Wegen $\mathrm{Mod}(\varphi) \in \mathcal{U}$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt somit $\mathcal{I}/\mathcal{U} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$, d.h. Φ hat ein Modell. □

Lösung zu Aufgabe 2 (c) (iii)

Da, wie in Aufgabe 2 (c) (*ii*) gezeigt wurde, der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik aus **UL** folgt, reicht es zu zeigen, dass die Behauptung aus dem Kompaktheitssatz der Aussagenlogik folgt. Sei X eine Menge und $\tau := \{Y_{(a,b)} \mid (a,b) \in X \times X\}$ eine Menge von AL-Variablen. Jeder τ-Interpretation $\mathcal{I}$ läßt sich die Relation $\widehat{\mathcal{I}} := \{(a,b) \in X \times X \mid \mathcal{I}(Y_{(a,b)}) = 1\}$ zuordnen. Wir geben eine Formelmenge Φ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{I}}$ ist eine lineare Ordnung auf X.

$$\Phi := \Big\{\neg Y_{(a,a)} \wedge \Big(Y_{(a,b)} \wedge Y_{(b,c)} \rightarrow Y_{(a,c)}\Big) \wedge \Big(Y_{(a,b)} \vee Y_{(b,a)}\Big) \mid a,b,c \in X \text{ und } a \neq b\Big\}$$

Offensichtlich ist $\widehat{\mathcal{I}}$ für jedes Modell $\mathcal{I}$ von Φ irreflexiv, transitiv und vollständig, also eine lineare Ordnung auf X. Bleibt zu zeigen, dass Φ ein Modell hat. Sei Φ_0 eine endliche Teilmenge von Φ. Dann gibt es eine endliche Menge $X_0 \subseteq X$, so dass die endlich vielen Variablen die in Φ_0 vorkommen allesamt in $\Big\{Y_{(a,b)} \mid a,b \in X_0\Big\}$ enthalten sind. Dass X_0 endlich ist, bedeutet nach Definition von *endlich* gerade, dass es eine Bijektion $f\colon X_0 \to n$ für ein $n \in \omega$ gibt und somit eine lineare Ordnung $\widehat{\mathcal{I}} := \{(a,b) \in X_0 \times X_0 \mid f(a) < f(b)\}$ auf X_0 gibt. Die zugehörige Interpretation $\mathcal{I}$ ist dann ein Modell von Φ_0. Also hat jede endliche Teilmenge von Φ ein Modell und somit nach Kompaktheitssatz auch Φ. □

Lösung zu Aufgabe 3 (a)

Definiere die *Hamming-Distanz* $d(f,g)$ von $f,g \in \{0,1\}^\omega$ als $d(f,g) := |\{i \in \omega \mid f(i) \neq g(i)\}|$. Nun könnte man beim Versuch eine Flippmenge X zu konstruieren, die Idee haben mittels Auswahlaxiom aus jeder Paarmenge $\{f,h\}$ mit $d(f,h) = 1$ entweder f oder h zu X hinzuzufügen. Allerdings wird durch Hinzunahme eines f zu X bereits festgelegt, dass dann auch alle g mit geradem Hamming-Abstand zu f hinzugefügt werden müssen und alle u mit ungeradem Hamming-Abstand zu f nicht hinzugefügt werden dürfen. Denn, wenn etwa $d(f,g) = 2n$ ist, dann gibt es $f_1, \dots, f_{2n-1}$ mit $d(f,f_1) = d(f_1,f_2) = \ldots = d(f_{2n-1},g) = 1$, so dass also

$f \in X \Rightarrow f_1 \notin X \Rightarrow f_2 \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow f_{2n-1} \notin X \Rightarrow g \in X$ gilt. Deshalb fassen wir zunächst alle f, g mit gerader Hamming-Distanz zu Mengen $[f] := \{g \in \{0,1\}^\omega \mid d(f,g) = 2n \text{ für ein } n \in \omega\}$ zusammen. Sei $\varphi_0(f)$ die Bitsequenz, die aus f entsteht, wenn man das 0-te Bit in f flippt, d.h. $(\varphi_0(f)(0), \varphi_0(f)(1), \ldots) := (1 - f(0), f(1), \ldots)$. Dann gilt also $d(f, \varphi_0(f)) = 1$ und $[\varphi_0(f)]$ enthält genau die Bitsequenzen mit ungerader Hamming-Distanz zu f. Für jedes f müssen wir also aus der Menge $[f] \cup [\varphi_0(f)]$ der Bitsequenzen mit endlicher Hamming-Distanz zu f entweder die gesamte Menge $[f]$ der Bitsequenzen geraden Abstands oder die gesamte Menge $[\varphi_0(f)]$ der Bitsequenzen ungeraden Abstands zu X hinzufügen. $x := \{\{[f], [\varphi_0(f)]\} \mid f \in \{0,1\}^\omega\}$ ist nach Ersetzungsaxiom eine Menge, womit es gemäß Auswahlaxiom eine Auswahlfunktion $c \colon x \to \bigcup x$ auf x gibt. Setze $X := \bigcup \text{Bild}(c)$, wobei $\text{Bild}(c) = \{c(y) \mid y \in x\}$.
Behauptung: X ist eine Flippmenge.
Beweis: Seien $f, h \in \{0,1\}^\omega$ mit $d(f,h) = 1$. Dann gilt $h \in [\varphi_0(f)]$ und $f \in [f]$. Also ist $f \in X$, falls $c(\{[f], [\varphi_0(f)]\}) = [f]$ und $h \in X$, falls $c(\{[f], [\varphi_0(f)]\}) = [\varphi_0(f)]$, d.h. $f \in X$ oder $h \in X$. Bleibt noch zu zeigen, dass nicht beide in X sein können. Für alle $y, z \in x$ mit $y \neq z$ gilt $\bigcup y \cap \bigcup z = \emptyset$, da $d(f,g) = \aleph_0$ für alle $f \in \bigcup y$ und $g \in \bigcup z$ ist. Außerdem gilt $[f] \cap [\varphi_0(f)] = \emptyset$. Also können nicht beide in X sein. $\square$

Alternative Lösung
Die Existenz einer Flippmenge folgt bereits aus der Existenz eines freien Ultrafilters auf ω. Definiere hierzu die Abbildung $\widetilde{} \colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}^\omega$ via $\widetilde{f}(n) := \sum_{i=0}^{n} f(i) \mod 2$. Dann gilt $d(f,g) = 1 \Rightarrow (\widetilde{f})^{-1}(1) \cap (\widetilde{g})^{-1}(1)$ ist endlich. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ ein freier Ultrafilter auf ω. Dann ist $X := \{f \in \{0,1\}^\omega \mid (\widetilde{f})^{-1}(1) \in \mathcal{U}\}$ eine Flippmenge, da freie Ultrafilter keine endlichen Mengen enthalten können. $\square$

Lösung zu Aufgabe 3 (b) (i)

Sei t eine Strategie von Spieler 1. Wir konstruieren zwei Strategien s, s' mit $d(\pi(s,t), \pi(s',t)) = 1$, womit also entweder $\pi(s,t) \in X$ oder $\pi(s',t) \in X$ gilt und t keine Gewinnstrategie für Spieler 1 sein kann. Strategie s beginnt mit dem Zug $s(\emptyset) = 0$. In jeder Runde wird dann immer abwechselnd die Antwort von Spieler 1 gemäß Strategie t in der einen Partie als nächster Zug in der anderen Partie verwendet, bis auf den ersten Zug von Partie $\pi(s,t)$ in dem der Antwort von Spieler 1 in Partie $\pi(s',t)$ eine 1 vorangestellt wird, damit die Partien sich an genau einer Stelle unterscheiden.

Runde	0	0	1	1	2	2	$\ldots$
Spieler	0	1	0	1	0	1	$\ldots$
$\pi(s,t)$	$0 \longrightarrow$	v_0	$v'_0 \longrightarrow$	v_1	$v'_1 \longrightarrow$	v_2	$\cdots$
$\pi(s',t)$	$1v_0 \longrightarrow$	v'_0	$v_1 \longrightarrow$	v'_1	v_2	$\cdots$	

In analoger Weise lassen sich zu jeder Strategie s von Spieler 0 zwei Strategien t, t' von Spieler 1 konstruieren, so dass entweder $\pi(s,t) \notin X$ oder $\pi(s,t') \notin X$ gilt.

Runde	0	0	1	1	2	2	$\ldots$
Spieler	0	1	0	1	0	1	$\ldots$
$\pi(s,t)$	w_0	$0 \longrightarrow$	w_1	$w'_1 \longrightarrow$	w_2	w'_2	$\cdots$
$\pi(s,t')$	w_0	$1w_1 \longrightarrow$	w'_1	$w_2 \longrightarrow$	w'_2	$\cdots$	

$\square$