Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

Musterlösung 8.Übung Mathematische Logik II

Lösung zu Aufgabe 4

Da Φ konsistent ist, gilt $\Phi^+ \cap \Phi^- = \emptyset$. Angenommen Φ^+ und Φ^- sind rekursiv trennbar, dann gibt es also eine rekursive Menge $C \subseteq \mathrm{FO}$ mit $\Phi^+ \subseteq C$ und $\Phi^- \cap C = \emptyset$. Dann ist auch die Menge der Gödelnummern $C^* = \{\ulcorner\varphi\urcorner \,|\, \varphi \in C\}$ rekursiv. Da Φ repräsentativ ist, gibt es für jede Zahl n einen Term t_n (den wir im Folgenden auch einfach mit n bezeichnen) über der Signatur von Φ und eine Formel $\psi_{C^*}(x)$, die C^* repräsentiert, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \in C^* \Rightarrow \Phi \models \psi_{C^*}(n)$ und $n \notin C^* \Rightarrow \Phi \models \neg\psi_{C^*}(n)$. Aus dem Fixpunktsatz angewandt auf die Formel $\neg\psi_{C^*}(x)$, folgt die Existenz eines Satzes φ mit

$$\Phi \models \varphi \leftrightarrow \neg\psi_{C^*}(\ulcorner\varphi\urcorner) \tag{1}$$

Es gilt entweder $\ulcorner\varphi\urcorner \in C^*$ oder $\ulcorner\varphi\urcorner \notin C^*$.

1. Fall: $\ulcorner\varphi\urcorner \in C^*$: Dann folgt $\Phi \models \psi_{C^*}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ und somit aus (1) $\Phi \models \neg\varphi \Rightarrow \varphi \in \Phi^- \Rightarrow \varphi \notin C \Rightarrow \ulcorner\varphi\urcorner \notin C^*$, was ein Widerspruch ist.

2. Fall: $\ulcorner\varphi\urcorner \notin C^*$: Dann folgt $\Phi \models \neg\psi_{C^*}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ und somit aus (1) $\Phi \models \varphi \Rightarrow \varphi \in \Phi^+ \Rightarrow \varphi \in C \Rightarrow \ulcorner\varphi\urcorner \in C^*$ was ein Widerspruch ist.

Da beide Fälle zum Widerspruch führen, kann es also eine solche Menge C nicht geben, d.h. Φ^+ und Φ^- sind rekursiv untrennbar. $\square$