Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, F. Reinhardt

WS 2014/15

Musterlösung 11.Übung Mathematische Logik II

Lösung zu Aufgabe 2 (e)

Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, <^{\mathfrak{A}})$. Wir behaupten, dass $\mathfrak{A}$ ω-saturiert ist. Aus Aufgabe 1 folgt die Existenz einer ω-saturierten elementaren Erweiterung $\mathfrak{B} = (B, <^{\mathfrak{B}})$ von $\mathfrak{A}$.

Wir definieren zunächst die folgenden Distanzformelmengen

$d_{=n}(x, y) := \{\exists^{=n} z(x \leq z < y)\}$ für alle $n \in \omega$

$d_{=-n}(x, y) := d_{=n}(y, x)$ für alle $n \in \omega$

$d_{=\infty}(x, y) := \{\exists^{\geq n} z(x \leq z < y) \,|\, n \in \omega\}$

$d_{=-\infty}(x, y) := d_{\infty}(y, x)$

Setze $\mathbb{Z}_\infty := \mathbb{Z} \cup \{\infty, -\infty\}$ Ist $\mathfrak{C} = (C, <^{\mathfrak{C}})$ eine lineare Ordnung, so gibt es offenbar für alle $a, b \in C$ genau ein $z \in \mathbb{Z}_\infty$ mit $\mathfrak{C} \models d_{=z}(a, b)$. Bezeichne $d_{\mathfrak{C}}(a, b) := z$ dieses eindeutige z. Man macht sich leich klar, dass $d_{\mathfrak{C}}(a, c) = d_{\mathfrak{C}}(a, b) + d_{\mathfrak{C}}(b, c)$ für alle $a, b, c \in C$ mit $(d_{\mathfrak{C}}(a, b), d_{\mathfrak{C}}(b, c)) \notin \{(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)\}$ gilt, wenn man $\infty + \infty = z + \infty = \infty + z = \infty$ und $-\infty + (-\infty) = z + (-\infty) = -\infty + z = -\infty$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ setzt.

Behauptung:

$$\text{Es gilt } (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n) \equiv_\infty (\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n) \text{ genau dann, wenn } d_{\mathfrak{A}}(a_i, a_j) = d_{\mathfrak{B}}(b_i, b_j) \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n. \tag{1}$$

Beweis:

"⇒": Sei $d_{\mathfrak{A}}(a_i, a_j) = z$, dann gilt $\mathfrak{A} \models d_{=z}(a_i, a_j)$ und somit wegen $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \overline{b})$ auch $\mathfrak{B} \models d_{=z}(b_i, b_j)$, also $d_{\mathfrak{B}}(b_i, b_j) = z = d_{\mathfrak{A}}(a_i, a_j)$.

"⇐": Wir zeigen, dass die Duplikatorin eine Gewinnstrategie im Ehrenfeucht-Fraisse-Spiel $G_\infty((\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_n), (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_n))$ hat. Dazu reicht es zu zeigen, dass die Duplikatorin immer so ziehen kann, dass an jeder Position $(\overline{a}, \overline{b})$ die Invariante

$$d_{\mathfrak{A}}(a_i, a_j) = d_{\mathfrak{B}}(b_i, b_j) \text{ , für alle } 1 \leq i, j \leq |\overline{a}| \tag{Inv}$$

erhalten bleibt. Sei also $(\overline{a}, \overline{b})$ eine Position an der die Invariante gilt und sei $c \in A$ der nächste Zug des Herausforderers.

1. Fall: Angenommen es gibt ein i mit $d_{\mathfrak{A}}(a_i, c) = z \in \mathbb{Z}$. Dann gilt also $\mathfrak{A} \models d_{=z}(a_i, c)$. Da zudem $\mathfrak{A} \models \forall x \exists y d_{=z}(x, y)$ und $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ folgt $\mathfrak{B} \models \forall x \exists y d_{=z}(x, y)$ und somit gibt es auch ein $d \in B$ mit $d_{\mathfrak{B}}(b_i, d) = z$. Da zudem $d_{\mathfrak{A}}(a_j, c) = d_{\mathfrak{A}}(a_j, a_i) + d_{\mathfrak{A}}(a_i, c) = d_{\mathfrak{B}}(b_j, b_i) + d_{\mathfrak{B}}(b_i, d) = d_{\mathfrak{B}}(b_j, d)$ für alle j gilt, bleibt die Invariante also an der Position $(\overline{a}c, \overline{b}d)$ erhalten.

2. Fall: Angenommen für alle i gilt $d_{\mathfrak{A}}(a_i, c) \in \{\infty, -\infty\}$. Sei $U := \{i \mid d_{\mathfrak{A}}(a_i, c) = -\infty\}$ und $L := \{i \mid d_{\mathfrak{A}}(a_i, c) = \infty\}$. Wir zeigen, dass $p := \bigcup_{u \in U} d_{=-\infty}(b_u, x) \cup \bigcup_{l \in L} d_{=\infty}(b_l, x)$ ein 1-Typ von $\mathfrak{B}$ über $\bar{b}$ ist: Sei $p_0 \subseteq p$ eine endliche Teilmenge. Dann gibt es ein $n \in \omega$, so dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}_{\bar{b}}) \models \varphi \to \bigwedge p_0$, mit $\varphi := \varphi(x, (b_u)_{u \in U}, (b_l)_{l \in L}) := \bigwedge_{u \in U} \exists^{\geq n} z(x \leq z < b_u) \wedge \bigwedge_{l \in L} \exists^{\geq n} z(b_l \leq z < x)$. Offenbar gilt

$\mathfrak{A} \models (\forall y_u)_{u \in U} (\forall y_l)_{l \in L} (\bigwedge_{(l,u) \in L \times U} \exists^{\geq 2n+1} z(y_l \leq z < y_u) \to \exists x \varphi(x, (y_u)_{u \in U}, (y_l)_{l \in L}))$ und somit wegen $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \models \bigwedge_{(l,u) \in L \times U} \exists^{\geq 2n+1} z(b_l \leq z < b_u)$ auch $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x, (b_u)_{u \in U}, (b_l)_{l \in L})$. Also ist $p_0 \cup \mathrm{Th}(\mathfrak{B}_{\bar{b}})$ konsistent und nach Kompaktheitssatz p somit ein 1-Typ in $\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{B}$ ω-saturiert ist, wird p in $\mathfrak{B}$ von einem Element $d \in B$ realisiert für das somit $d_{\mathfrak{B}}(b_j, d) = d_{\mathfrak{A}}(a_j, d)$ für alle j gilt, womit also an der Position $(\bar{a}c, \bar{b}d)$ die Invariante erhalten bleibt.

Wenn der Herausforderer ein Element $c \in B$ wählt geht man analog vor, wobei man nur im 2. Fall beachten muss, dass der 1-Typ p auch in $\mathfrak{A}$ realisiert wird. $\square$

Sei nun p ein 1-Typ von $\mathfrak{A}$ über einem endlichen Tupel $\bar{a}$. Aus $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ folgt zunächst $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{a})$, womit p auch ein 1-Typ von $\mathfrak{B}$ über $\bar{a}$ ist, sowie mit der vorhergehenden Behauptung $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_\infty (\mathfrak{B}, \bar{a})$. Da $\mathfrak{B}$ ω-saturiert ist, gibt es ein $c \in B$, das p in $\mathfrak{B}$ realisiert und somit auch ein $d \in A$ mit $(\mathfrak{B}, \bar{a}c) \equiv_\infty (\mathfrak{A}, \bar{a}d)$ und somit realisiert d den Typ p in $\mathfrak{A}$. Also ist $\mathfrak{A}$ ω-saturiert. $\square$

Lösung zu Aufgabe 4 (a) $\varphi_1(x) = \forall y \exists z(Exy \vee Eyz)$ ist nicht bisimulations-invariant, kann also nicht äquivalent zu einer ML-Formel sein: $\mathcal{K}_1 = (\{0,1\}, \{(0,1)\})$ und $\mathcal{K}_2 = (\{0,1,2\}, \{(0,1)\})$ sind bisimilar via $Z = \{(0,0),(1,1)\}$, aber es gilt $\mathcal{K}_1 \models \varphi_1(0)$ und $\mathcal{K}_2 \models \neg\varphi_1(0)$.

(b) $\varphi_2(x) = \forall y \exists z(\neg Exy \vee Eyz) \equiv \forall y(\neg Exy \vee \exists z Eyz) \equiv \forall y(Exy \to \exists z Eyz) \equiv \Box\Diamond 1$

(c) $\varphi_3(x) = \exists y \forall z(Eyx \wedge Eyz \wedge Pz)$ ist nicht bisimulations-invariant:

$\mathcal{K}_1 = (\{0,1\}, \{(0,0),(0,1)\}, \{0,1\}) \models \varphi_3(1)$, $\mathcal{K}_2 = (\{1\}, \emptyset, \{1\}) \models \neg\varphi_3(1)$, aber $\mathcal{K}_1, 1 \sim \mathcal{K}_2, 1$ via $Z = \{(1,1)\}$.

Lösung zu Aufgabe 5

	$\mathcal{K}',1$	$\mathcal{K}',2$	$\mathcal{K}',3$	$\mathcal{K}',4$	$\mathcal{K}',5$
$\mathcal{K},1$	$\langle a\rangle 1$	$\langle b\rangle\langle a\rangle 1$	$\sim$	$\langle b\rangle\langle a\rangle 1$	$\langle a\rangle 1$
$\mathcal{K},2$	$\langle a\rangle 1$	$\sim$	$\langle b\rangle[a]0$	$\sim$	$\langle a\rangle 1$
$\mathcal{K},3$	$\sim$	$[a]0$	$[a]0$	$[a]0$	$\sim$
$\mathcal{K},4$	$\langle a\rangle 1$	$\sim$	$\langle b\rangle[a]0$	$\sim$	$\langle a\rangle 1$
$\mathcal{K},5$	$\langle a\rangle 1$	$\langle b\rangle\langle a\rangle 1$	$\sim$	$\langle b\rangle\langle a\rangle 1$	$\langle a\rangle 1$

(a) $Z = \{(1,3),(2,2),(2,4),(3,1),(3,5),(4,2),(4,4),(5,3)\}$ ist maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$. Es gilt also $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', w \Leftrightarrow (v,w) \in Z$.

(b) Siehe Tabelle.

(c) $\varphi(x) = \exists y E_a yx$.