Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

1. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 16. Oktober in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 $1 + (1 + 1) + 1$ Punkte

(a) Schreiben Sie die natürliche Zahl [4] in der Mengennotation (mit Hilfe der Symbole {, }, $\emptyset$ und Komma).

(b) Eine Menge x heißt transitiv, wenn für alle $y \in x$ und alle $z \in y$ gilt, dass $z \in x$ ist.

   (i) Zeigen oder widerlegen Sie, dass eine Menge x genau dann transitiv ist, wenn für alle $y \in x$ gilt, dass $y \subseteq x$ ist.

   (ii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Relation $\in$ auf einer transitiven Menge in gewöhnlichem Sinne transitiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge der natürlichen Zahlen transitiv ist.

Aufgabe 2 $(2 + 2 + 2 + 2)$ Punkte

Geben Sie jeweils eine Formel $\varphi_i(x) \in \mathrm{FO}(\{\in\})$ an, sodass $A_i = \{x \mid \varphi_i(x)\}$:

$$A_1 = \{x \mid x \text{ hat mindestens 3 Elemente}\}$$
$$A_2 = \{x \mid \text{alle Elemente von } x \text{ enthalten die leere Menge}\}$$
$$A_3 = \{x \mid \text{kein Element von } x \text{ enthält ein anderes Element von } x\}$$
$$A_4 = \{x \mid \text{alle Elemente von } x \text{ sind transitiv}\}$$

Aufgabe 3 $(2 + 2) + 3 + (2 + 4)$ Punkte

(a) Beweisen Sie folgende Eigenschaften hereditär endlicher Mengen.

   (i) $\mathrm{HF}_n \subseteq \mathrm{HF}_{n+1}$ und $\mathrm{HF}_n \in \mathrm{HF}_{n+1}$

   (ii) HF_n hat endlich viele Elemente.

(b) Zeichnen Sie den gerichteten Graphen $\mathcal{G}_4 = (\mathrm{HF}_4, E)$ mit $E = \{(x, y) \mid x \in y\}$. Welche Knoten entsprechen natürlichen Zahlen?

(c) Betrachten Sie den Graphen $\mathcal{G} = (\mathrm{HF}, E)$ mit $E = \{(x, y) \mid x \in y \text{ oder } y \in x\}$.

   (i) Welchen Durchmesser hat $\mathcal{G}$?

   (ii) Zeigen Sie, dass für alle paarweise verschiedenen $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathrm{HF}$ ein $z \in \mathrm{HF}$ existiert, das in $\mathcal{G}$ mit allen $a_1, \dots, a_n$, aber mit keinem $b_1, \dots, b_m$ durch eine Kante verbunden ist.

Aufgabe 4 4 Punkte

Leiten Sie die Inkonsistenz der naiven Mengenlehre her, indem Sie statt der Formel $x \notin x$ die Formel $\psi(x) = \neg\exists y \exists z(x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x)$ verwenden.