Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

4. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 06. November in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 4 Punkte

Sei $(A, \leq)$ eine partielle Ordnung und $X \subseteq A$. Ein Element $a \in A$ heißt *untere Schranke* von X, wenn für alle $x \in X$ gilt $a \leq x$. Ist a eine untere Schranke und gilt $a \geq b$ für alle unteren Schranken b, dann heißt a *Infimum* von X. Ein Element $a \in X$ ist *minimal* (bezüglich X), wenn es kein Element $c \in X$ mit $c \leq a$ und $c \neq a$ gibt.

Wir betrachten $(B, \subseteq)$ mit $B = \{x \subseteq \omega \,|\, x \text{ ist endlich oder } \omega \setminus x \text{ ist endlich}\}$, wobei ω die Menge der natürlichen Zahlen ist. (Eine Menge x ist endlich, wenn es eine Bijektion $f : x \to n$ von dieser Menge in eine natürliche Zahl $n \in \omega$ gibt.)

Gibt es eine Teilmenge von B ohne minimales Element? Konstruieren Sie eine Teilmenge von B mit einer unteren Schranke, aber ohne Infimum.

Aufgabe 2 2 Punkte

Für Klassen A, B und C seien $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ binäre Relationen. Die *Komposition* $S \circ R \subseteq A \times C$ von R und S ist definiert durch

$$S \circ R = \{(a, c) \,|\, \text{ es gibt ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in S\}.$$

Wir definieren die Relation $\mathrm{id}_A = \{(a, a) \,|\, a \in A\}$. Ferner sei $R^{-1} = \{(b, a) \,|\, (a, b) \in R\}$. Gilt für alle Relationen $R \subseteq A \times B$, dass $R^{-1} \circ R \subseteq \mathrm{id}_A$ ist?

Aufgabe 3 1 + 2 + 2 + 2 Punkte

Geordnete Paare (x, y) von Mengen x und y können durch $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ definiert werden. Eine Formalisierung von Tripeln (x, y, z) als Mengen ist *adäquat*, wenn $(x, y, z) = (x', y', z')$ genau dann, wenn $x = x', y = y'$ und $z = z'$. Sind die folgenden Formalisierungen adäquat?

(a) $(x, y, z) = ((x, y), z)$,

(b) $(x, y, z) = \{\{x, [0]\}, \{y, [1]\}, \{z, [2]\}\}$,

(c) $(x, y, z) = \{x, \{y\}, \{\{z\}\}\}$,

(d) $(x, y, z) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$.

Aufgabe 4 2 + 2 + 2 + 4 Punkte

Sei X eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $\bigcup X$ und $\bigcap X$ Ordinalzahlen sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\bigcup X$ die kleinste Ordinalzahl β ist, so dass $\alpha \leq \beta$ für alle $\alpha \in X$.

(c) Geben Sie eine entsprechende Beschreibung von $\bigcap X$ an und zeigen Sie deren Korrektheit.

(d) Zeigen Sie, dass für jede Ordinalzahl α gilt: $\alpha = \bigcup \alpha \Leftrightarrow \alpha$ ist Limesordinal oder $\alpha = \emptyset$.