Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

5. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 13. November in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 2 + 3 Punkte

(a) Geben Sie eine (die) Menge von kleinstem Rang an, welche keine Ordinalzahl ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Ordinalzahl eindeutig darstellbar ist in der Form $\lambda + n$, wobei $n \in \omega$ und λ eine Limesordinalzahl oder 0 ist.

Aufgabe 2 5 + 4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass zu jeder Ordinalzahl α eine Limesordinalzahl $\lambda > \alpha$ existiert.
Hinweis: Benutzen Sie den Rekursionssatz, um eine geeignete Funktion $f\colon \omega \to \mathbb{S}$ zu definieren.

(b) Sei $(\mathbb{S}, \in)$ ein Modell von ZF. Zeigen Sie, dass die Struktur $(S_{\omega+\omega}, \in)$ ein Modell von ZF ohne das Ersetzungsaxiom ist, wobei das Ersetzungsaxiom nicht gilt.

Aufgabe 3 7 Punkte

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in Cantornormalform:

(a) $(((1 + \omega) + 1) + \omega) + 1$,

(b) $(((2 \cdot \omega) \cdot 2) \cdot \omega) \cdot 2$,

(c) $\sup\{n + m \mid m, n \in \omega\}$,

(d) $\sup\{\omega \cdot n + 3 \mid n \in \omega\}$,

(e) $\bigcup \omega$,

(f) $\bigcup \{\omega\}$,

(g) $\sup\{\omega^n + \omega \mid n \in \omega\}$.