Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

6. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 20. November in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 1 + 2 + 2 + 1 + 2 Punkte

Eine Menge X heißt *abzählbar*, wenn eine injektive Funktion $f\colon X \to \omega$ existiert. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (ohne den Satz von Hessenberg zu verwenden):

(a) Eine unendliche Menge X is genau dann abzählbar, wenn es eine bijektive Funktion $f\colon X \to \omega$ gibt.

(b) $\omega \times \omega$ ist abzählbar.

(c) Sei X eine abzählbare Menge abzählbarer Mengen. Dann ist $\bigcup X$ abzählbar.

(d) X ist abzählbar genau dann, wenn $\bigcup X$ abzählbar ist.

(e) Sei α ein abzählbares Ordinal. Dann ist ω^α abzählbar.

Aufgabe 2 1 + 2 + 3 Punkte

Wir definieren $\gamma = \bigcup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\gamma = \omega^\gamma$.

(b) Ist γ abzählbar?

(c) Sei $\alpha < \gamma$. Zeigen Sie, dass dann $\alpha < \omega^\alpha$.

Aufgabe 3 1 + 4 + 3 + 2 + 5 Punkte

Wir wollen zeigen, dass die folgenden Eigenschaften (auf Basis von ZF) äquivalent zum Auswahlaxiom sind:

(1) Auf jeder Menge A existiert eine Funktion f, so dass für alle nicht leeren $a \in A$ gilt, dass $f(a)$ eine endliche, nicht leere Teilmenge von a ist.

(2) Jede partiell geordnete Menge hat eine maximale Teilmenge paarweise unvergleichbarer Elemente.

(3) Auf jeder linear geordneten Menge A existiert eine Wohlordnung.

(4) Auf der Potenzmenge jeder wohlgeordneten Menge existiert eine Wohlordnung.

Dazu zeigen wir die folgenden Implikationen:

(a) Zeigen Sie, dass aus dem Auswahlaxiom (1) folgt.

(b) Zeigen Sie (1) $\Rightarrow$ (2).
Hinweis: Für $(A, <)$ partiell geordnet und $\emptyset \neq X \subseteq A$ betrachten Sie zunächst die Menge aller bezüglich $<$ minimalen Elemente in $f(X)$, wobei f eine Funktion wie in (1) auf der Potenzmenge von A ist.

(c) Zeigen Sie (2) $\Rightarrow$ (3).
Hinweis: Finden Sie eine Auswahlfunktion auf der Potenzmenge von A, indem Sie die Menge der Paare (X, x) mit $X \subseteq A$ und $x \in X$ betrachten.

(d) Zeigen Sie (3) $\Rightarrow$ (4).

(e) Zeigen Sie, dass aus (4) das Auswahlaxiom folgt.
Hinweis: Zeigen Sie induktiv, dass jede Stufe s, die eine Menge ist, wohlgeordnet werden kann. Betrachten Sie dazu ein Ordinal κ, so dass eine Bijektion zwischen κ und s existiert.

Aufgabe 4* 6* Punkte

Aus der Vorlesung wissen wir, dass aus dem Auswahlaxiom auf Basis von ZF folgt, dass jeder Vektorraum eine Basis hat. Zeigen Sie, dass auch die Umkehrung gilt, das heißt, dass man aus der Aussage, dass jeder Vektorraum eine Basis hat, das Auswahlaxiom herleiten kann.
Hinweis: Zeigen Sie (1) aus Augabe 3. Sei dazu A eine Menge und $X = \bigcup A$. Wenn wir die Elemente von X zu $\mathbb{F}_2$ adjungieren, erhalten wir den Körper $\mathbb{F}_2(X)$ der *rationalen Funktionen* über $\mathbb{F}_2$ mit Variablen in X. Die Elemente von $\mathbb{F}_2(X)$ haben die Form $\frac{p}{q}$, wobei $q \neq 0$ und $p, q \in \mathbb{F}_2[X]$, das heißt p und q sind Polynome der Form

$$\sum_{e \in E} \left(a_e \prod_{x \in X} x^{e(x)} \right), \text{ wobei } a_e \in \mathbb{F}_2,\ E = \{e \colon X \to \omega \mid e(x) \neq 0 \text{ für endlich viele } x \in X\}$$

und nur endlich viele a_e sind ungleich 0. Die Terme der Form $\prod_{x \in X} x^{e(x)}$ mit $e \in E$, nennen wir *Monome*. Für $a \in A$ definieren wir den a-Grad $g_a(m)$ eines Monoms $m \in k[X]$ als die Summe der Exponenten von Elementen aus a, die in m vorkommen, also $g_a(\prod_{x \in X} x^{e(x)}) = \sum_{x \in a} e(x)$. Eine rationale Funktion $f = \frac{p}{q} \in \mathbb{F}_2(X)$ heißt a-homogen vom Grad $d \in \mathbb{Z}$, wenn alle Monome in q den gleichen a-Grad $n \in \omega$ haben und der a-Grad aller Monome in p gleich $n + d$ ist.
Die Menge der für alle $a \in A$ a-homogenen Funktionen vom Grad 0 bildet einen Körper K und $\mathbb{F}_2(X)$ ist ein Vektorraum über K (dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden). Betrachten Sie nun für alle $x, y \in a \subseteq \mathbb{F}_2(X)$ die jeweils eindeutige Darstellung als Linearkombination von Basiselementen und vergleichen Sie diese miteinander durch Skalarmultiplikation mit einem geeigneten Element aus K.