Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

7. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 27. November in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1 3 + 3 Punkte

Eine Menge x ist Dedekind-endlich, wenn keine echte Teilmenge von x gleichmächtig zu x ist. Zeigen Sie:

(a) Eine Menge x ist genau dann Dedekind-endlich, wenn sie endlich ist.

(b) Eine Menge x ist genau dann endlich, wenn jede Funktion $f : x \to x$, die injektiv oder surjektiv ist, bereits bijektiv ist.

Aufgabe 2 $5^* + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 5^*$ Punkte

Sei A eine Menge und sei $\leq$ eine lineare Ordnung auf A. Eine Teilmenge X von A heißt *kofinal in* A, wenn für jedes $a \in A$ ein $x \in X$ existiert, so dass $a \leq x$ gilt. Sei α eine Ordinalzahl. Die Kofinalität $\mathrm{cf}(\alpha)$ von α ist die kleinste Ordinalzahl, so dass eine Abbildung $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ existiert, deren Bild in α nicht beschränkt ist. (Das heißt für alle $\gamma \in \alpha$ gibt es ein $\delta \in \mathrm{cf}(\alpha)$, so dass $f(\delta) \geq \gamma$ ist.) Eine Ordinalzahl α heißt regulär, falls α Limesordinalzahl ist und $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ gilt.

(a*) Zeigen Sie, dass jede lineare Ordnung $(A, \leq)$ eine kofinale wohlgeordnete Teilmenge besitzt.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass für alle Ordinalzahlen α, β aus $\alpha \leq \beta$ immer $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$ folgt.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{cf}(\alpha)$ für $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega \cdot 2$ und für jede Nachfolgerordinalzahl α.

(d) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathrm{cf}(\alpha)$ für Limesordinale α selbst wieder ein Limesordinal ist.

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{cf}(\alpha) \in \mathrm{Cn}$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt.

(f) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$ gilt.

(g*) Zeigen Sie, dass alle unendlichen Nachfolgerkardinalzahlen regulär sind.

Aufgabe 3 (2 + 2) + 2 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie:

  (i) $|\{\alpha < \aleph_1 \mid \alpha \text{ ist Nachfolgerordinal}\}| = \aleph_0$,

  (ii) $|\{\alpha < \aleph_1 \mid \alpha \text{ ist Limesordinal}\}| = \aleph_0$.

(b) Es sei x eine Menge mit $|x| \leq \kappa$ für ein $\kappa \in \mathrm{Cn}^\infty$ und es gelte $|y| \leq \kappa$ für alle $y \in x$. Zeigen Sie, dass $|\bigcup x| \leq \kappa$ ist.

Aufgabe 4 4 Punkte

Es sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ für eine Signatur τ ein rekursiv aufzählbares Axiomensystem. Zeigen Sie, dass $\Phi^\models$ bereits rekursiv axiomatisierbar ist.