Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

9. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 11. Dezember in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 2 + 4 + 2 Punkte

Es seien im Folgenden $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ drei τ-Strukturen für eine Signatur τ. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ und sei A oder B endlich. Dann gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

(b) Ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$, so ist auch $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(c) Gilt $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

Aufgabe 2 3 + 2 + 2 Punkte

Sei α eine Ordinalzahl und $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ eine Kette von τ-Strukturen.

(a) Zeigen Sie: Wenn $(\mathfrak{A}_\beta)_{\beta<\alpha}$ eine elementare Kette ist, dann gilt $\mathfrak{A}_\beta \preceq \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta$ für alle $\beta < \alpha$.

(b) Gelte $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \models \exists \overline{x} \forall \overline{y} \varphi(\overline{x}, \overline{y})$, wobei $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{FO}(\tau)$ quantorenfrei ist. Gilt dann auch $\mathfrak{A}_\beta \models \exists \overline{x} \forall \overline{y} \varphi(\overline{x}, \overline{y})$ für ein $\beta < \alpha$?

(c) Gelte nun $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{A}_\beta \models \forall \overline{x} \exists \overline{y} \varphi(\overline{x}, \overline{y})$, wobei $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{FO}(\tau)$ quantorenfrei ist. Gilt dann auch $\mathfrak{A}_\beta \models \forall \overline{x} \exists \overline{y} \varphi(\overline{x}, \overline{y})$ für ein $\beta < \alpha$?

Aufgabe 3 2 + 2 + 2 Punkte

Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$, P die Menge aller Primzahlen und für jede Teilmenge $X \subseteq P$ sei $\Phi_X = \{\varphi_p(x) \mid p \in X\} \cup \{\neg\varphi_p(x) \mid p \in P \setminus X\}$. Dabei sei $\varphi_p(x) \in \mathrm{FO}(\{+, \cdot\})$ die Formel $\exists y\ x = \overline{p} \cdot y$ für alle $p \in P$, wobei $\overline{p}$ einen Term bezeichnet, der p definiert. Ferner sei $\varphi_{\mathrm{prim}}(x) \in \mathrm{FO}(\{+, \cdot\})$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ genau dann $\mathfrak{N} \models \varphi_{\mathrm{prim}}(k)$ gilt, wenn $k \in P$ ist.

(a) Für welche $X \subseteq P$ ist Φ_X ein Typ von $\mathfrak{N}$ über $\emptyset$?

(b) Für welche $X \subseteq P$ ist Φ_X in $\mathfrak{N}$ realisiert?

(c) Zeigen Sie, dass es eine elementare Erweiterung $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$ gibt, die eine Nicht-Standard-Primzahl p^* enthält. (Das heißt $\mathfrak{M} \models \varphi_{\mathrm{prim}}(p^*)$ und $p^* \notin \mathbb{N}$.)

Aufgabe 4 2 + 3 Punkte

Sei τ eine endliche Signatur.

(a) Zeigen Sie, dass jede Klasse $\mathcal{C}$ endlicher τ-Strukturen in $\mathrm{L}_{\infty\omega}$ definierbar ist, das heißt, dass eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}_{\infty\omega}(\tau)$ existiert, sodass für jede endliche Struktur $\mathfrak{A} \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$.

(b) Funktioniert diese Konstruktion auch für andere Klassen von Strukturen, ohne Einschränkung der Kardinalität?