Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

10. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 08. Januar in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Bonusaufgaben.

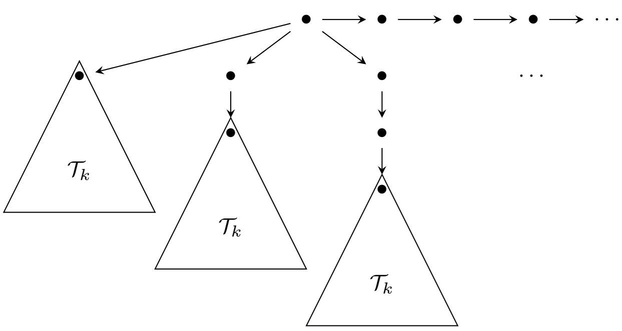
Aufgabe 1 1 + 4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass $L_{\omega_1\omega}(\tau)$ überabzählbar ist für alle Signaturen τ.

(b) Konstruieren Sie eine überabzählbare τ-Struktur $\mathfrak{B}$ für eine geeignete *abzählbare* Signatur τ, so dass keine abzählbare τ-Struktur $\mathfrak{A}$ existiert, welche genau die gleichen $L_{\omega_1\omega}(\tau)$-Sätze erfüllt wie $\mathfrak{B}$.

Aufgabe 2 4 Punkte

Für $k = 1, 2, \dots$ definieren wir den gerichteten Baum $\mathcal{T}_k$ mit Wurzel induktiv. $\mathcal{T}_1$ besteht aus disjunkten endlichen Pfaden der Längen jeweils $1, 2, 3, \dots$, die von der Wurzel ausgehen. Für $k > 1$ entsteht $\mathcal{T}_{k+1}$ aus $\mathcal{T}_1$, indem man jedes Blatt durch die Wurzel des Baumes $\mathcal{T}_k$ ersetzt. Enstehe ferner $\mathcal{T}'_k$ aus $\mathcal{T}_k$ durch Anhängen eines unendlichen Pfades an die Wurzel. Geben Sie die kleinste Ordinalzahl α an, so dass $I_\alpha(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}'_k) = \emptyset$ oder beweisen Sie, dass keine solche Ordinalzahl existiert.



Aufgabe 3 4 Punkte

Sei τ eine endliche relationale Signatur. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \cong_\infty \mathfrak{B}$. Ferner existiere ein zweistelliges Relationssymbol $R \in \tau$, so dass $R^{\mathfrak{A}}$ eine Wohlordnung ist. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ gilt.

Aufgabe 4* 5* + 5* Punkte

Für zwei lineare Ordnungen $(A, <)$ und $(B, <)$ sei $(A, <)\cdot(B, <) := (A\times B, <)$ mit $(a, b) < (a', b')$ genau dann, wenn $b < b'$ oder $b = b'$ und $a < a'$. (Intuitiv gesprochen besteht also $(A, <)\cdot(B, <)$ aus B vielen isomorphen Kopien von A, linear hintereinander geschrieben.) Für $0 < n < \omega$ sei $(A, <)^n$ definiert durch $(A, <)^1 = (A, <)$ und $(A, <)^{n+1} = (A, <)^n \cdot (A, <)$.

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n die kleinste Ordinalzahl α, so dass I eine Gewinnstrategie für das Spiel $G_\alpha((\mathbb{Z},<)^n,(\mathbb{Z},<)^{n+1})$ hat und geben Sie eine solche Strategie für I an.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n die kleinste Ordinalzahl α, so dass I eine Gewinnstrategie für das Spiel $G_\alpha((\omega,<)^n,(\omega,<)^{n+1})$ hat und geben Sie eine solche Strategie für I an.