Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

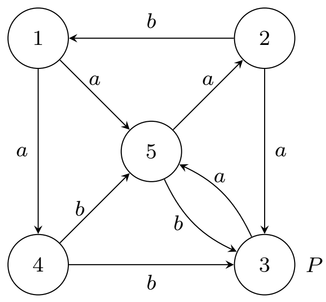
WS 2017/18

11. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 15. Januar in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgabe 1 1 + 1 + 1 + 1 Punkte

Sei $\tau = \{E_a, E_b, P\}$ eine Signatur und $\mathcal{K} = (V, \tau^{\mathcal{K}})$ das folgende Transitionssystem:



Berechnen Sie für jede der folgenden ML-Formen ψ jeweils $[\![\psi]\!]^{\mathcal{K}} := \{v \in V \mid \mathcal{K}, v \models \psi\}$

(i) $\psi_1 := [b]P$

(ii) $\psi_2 := [b]\langle a\rangle 0$

(iii) $\psi_3 := \langle a\rangle(P \vee [b]0)$

(iv) $\psi_4 := [a]\langle b\rangle[b]\langle a\rangle 1$

Aufgabe 2 1 + 1 + 1 Punkte

Geben Sie zu den folgenden FO-Formeln $\varphi(x)$ jeweils eine äquivalente ML-Formel an, oder beweisen Sie, dass eine solche Formel nicht existiert:

(i) $\varphi_1(x) := \exists y \forall z(\neg Exy \vee Eyz)$;

(ii) $\varphi_2(x) := \forall y(Exy \vee \exists z Eyz)$;

(iii) $\varphi_3(x) := \forall y \exists z(\neg Eyx \vee (Eyz \wedge Pz))$.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 4) + 3 + 4 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden partiellen Ordnungen vollständige Verbände sind.

(i) $(\{1, 2, 3\}, |)$ mit $a \mid b$ genau dann, wenn ein $c \in \omega$ existiert mit $b = a \cdot c$.

(ii) $(\{1, 3, 5, 30, 45, 90\}, |)$.

(iii) $(P_A, \preceq)$, wobei P_A die Menge aller Partitionen einer Menge A bezeichnet und

$$\gamma \preceq \delta \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \text{ ist feiner als } \delta\text{, das heißt jedes } a \in \gamma \text{ ist Teilmenge eines } b \in \delta$$

für alle $\gamma, \delta \in P_A$.

(b) Ist $(\omega, |)$ mit $|$ definiert wie in (a)(i) ein Verband? Ist es ein vollständiger Verband? Falls ja, geben Sie an, wie Infimum und Supremum einer beliebigen Menge bestimmt werden können, und bestimmen Sie $\top$ und $\bot$. Gelten Ihre Ergebnisse auch für $(\omega \setminus \{0\}, |)$?

(c) Eine *Antikette* auf X ist eine Menge $Y \subseteq X$, so dass je zwei verschiedene Elemente aus Y unvergleichbar sind. Wir definieren auf Antiketten eine Ordnung durch $A \preceq B$, wenn für alle $x \in A$ ein $y \in B$ existiert mit $x \leq y$. Sei nun $(X, \leq)$ ein endlicher vollständiger Verband und sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Antiketten auf X. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{A}, \preceq)$ wieder ein vollständiger Verband ist.

Aufgabe 4 2 + 4 Punkte

Sei $G = (V, E, P)$ ein endlicher gerichteter Graph mit einem unären Prädikat $P \subseteq V$ und für $v \in V$ sei $vE = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ die Menge der direkten Nachfolger von v in G.

(a) Wir definieren $F : 2^V \to 2^V$ durch $F(X) = P \cup \{v \in V \mid vE \cap X \neq \emptyset\}$. Zeigen Sie, dass F einen kleinsten Fixpunkt besitzt, und beschreiben Sie diesen.

(b) Wir definieren $G : 2^V \times 2^V \to 2^V$ wie folgt.

$$G(X, Y) := (P \cap \{v \in V \mid vE \cap Y \neq \emptyset\}) \cup \{v \in V \mid vE \cap X \neq \emptyset\}.$$

Ferner seien $F_Y : 2^V \to 2^V$ und $\mathrm{lfp}_G : 2^V \to 2^V$ definiert durch $F_Y(X) = G(X, Y)$ für $X, Y \in 2^V$ und $\mathrm{lfp}_G(Y) = \mathrm{lfp}(F_Y)$ für $Y \in 2^V$. Zeigen Sie, dass F_Y für alle $Y \in 2^V$ einen kleinsten Fixpunkt hat. Zeigen Sie ferner, dass lfp_G einen größten Fixpunkt besitzt, und beschreiben Sie diesen.