

## 12. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 22. Januar in der Vorlesung oder um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgaben, die mit einem \* versehen sind, sind Bonusaufgaben.

### Aufgabe 1

2 Punkte

Sei  $\varphi \in L_\mu(\tau \cup X)$  und  $\varphi^*(x) \in \text{MSO}(\tau \cup X)$  so, dass für alle Transitionssysteme  $\mathcal{K} = (V, \tau^\mathcal{K}, X^\mathcal{K})$  und alle  $v \in V$  genau dann  $\mathcal{K}, v \models \varphi$  gilt, wenn  $\mathcal{K} \models \varphi^*(v)$ . Sei  $\psi = \nu X.\varphi$ . Geben Sie eine entsprechende Übersetzung  $\psi^*$  für  $\psi$  in  $\text{MSO}(\tau)$  an.

### Aufgabe 2

2 + 2 Punkte

Sei  $\mathcal{K} = (V, E, P)$  eine Kripkestruktur und  $v \in V$ . Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften in  $L_\mu$ .

- Auf allen Pfaden von  $v$  aus gilt nur endlich oft  $P$ .
- Die Request-Response-Bedingung : Von jedem von  $v$  aus erreichbaren Knoten, an dem  $P$  gilt, ist ein Knoten erreichbar, an dem  $Q$  gilt.

### Aufgabe 3

2 + 1 Punkte

Betrachten Sie die Kripkestruktur  $\mathcal{K} = (\{a, b\}^\omega, E_a^\mathcal{K} := \{(aw, w) \in V^2 \mid w \in \{a, b\}^\omega\}, E_b^\mathcal{K} := \{(bw, w) \in V^2 \mid w \in \{a, b\}^\omega\})$  und die beiden  $L_\mu$ -Formeln  $\varphi_1 := \nu Y.\mu X.[a]Y \wedge [b]X$  und  $\varphi_2 := \mu X.\nu Y.[a]Y \wedge [b]X$ .

- Berechnen Sie die Sprachen  $L_i := \{w \in \{a, b\}^\omega \mid \mathcal{K}, w \models \varphi_i\}$  für  $i = 1, 2$ .
- Gilt  $\varphi_1 \models \varphi_2$  oder  $\varphi_2 \models \varphi_1$ ?

### Aufgabe 4

2 + 5 Punkte

Wir betrachten die Signatur  $\tau = \{E, P\}$  mit einem zweistelligen Relationssymbol  $E$  und einem einstelligen Relationssymbol  $P$ .

- Geben Sie eine LFP-Formel  $\varphi(x) \in \text{LFP}(\tau)$  an, so dass für jeden gerichteten Graphen  $G = (V, E^G, P^G)$  und jeden Knoten  $v \in V$  genau dann  $G \models \varphi(v)$  gilt, wenn an jedem Terminalknoten, der von  $v$  aus erreichbar ist,  $P$  gilt.
- Geben Sie eine LFP-Formel  $\varphi(x) \in \text{LFP}(\tau)$  an, so dass für jeden gerichteten Graphen  $G = (V, E^G, P^G)$  und jeden Knoten  $v \in V$  genau dann  $G \models \varphi(v)$  gilt, wenn es von  $v$  aus einen unendlichen Pfad gibt, auf dem nur endlich oft  $P$  gilt.

**Aufgabe 5**

5 Punkte

Sei  $R$  ein einstelliges Relationssymbol. Zeigen Sie, dass folgendes Problem unentscheidbar ist:

- Gegeben eine Formel  $\varphi(x) \in \text{FO}$ .
- Ist  $F_\varphi^{\mathfrak{A}}$  monoton für alle Strukturen  $\mathfrak{A}$  der Signatur  $\tau(\varphi) \setminus \{R\}$ ?

*Hinweis:* Benutzen Sie, dass das Erfüllbarkeitsproblem für FO unentscheidbar ist.

**Aufgabe 6\***

5\* Punkte

Sei  $\varphi \in L_\mu$ . Zeigen Sie, dass  $\mu X.\mu Y.\varphi(X, Y) \equiv \mu Z.\varphi(Z, Z)$ .