Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

13. Übung Mathematische Logik II

Abgabe: bis Montag, 29. Januar um 18:00 Uhr am Lehrstuhl.

Aufgaben, die mit einem * versehen sind, sind Bonusaufgaben.

Aufgabe 1* 3* + 3* Punkte

Beschreiben Sie jeweils, was die folgenden Sätze ausdrücken:

(a) $$\forall x \forall y\, (Exy \to \neg\, [\mathrm{lfp}\, Pz : z = x \lor \exists u \exists v((Ezu \lor Euz) \land (Euv \lor Evu) \land Pv)]\,(y))$$

(b) $$\neg\exists x\Big(\, [\mathrm{gfp}\, Fx : (V_0x \land \forall y(Exy \to Fy)) \lor (V_1x \land \exists y(Exy \land Fy))]\,(x) \\ \land [\mathrm{gfp}\, Fx : (V_1x \land \forall y(Exy \to Fy)) \lor (V_0x \land \exists y(Exy \land Fy))]\,(x)\Big)$$

Aufgabe 2* 4* Punkte

Geben Sie eine Formel $\varphi(x)$ der Fixpunktlogik an, welche in $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$ die Menge der Primzahlen definiert.

Aufgabe 3* 3* + 3* Punkte

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ ein Spielgraph, $\sigma \in \{0, 1\}$ und $X \subseteq V$. Geben Sie jeweils LFP-Formeln an, die die folgenden Mengen definieren.

(a) Den Attraktor $\mathrm{Attr}_\sigma(X)$.

(b) Die maximale Falle für Spieler $1 - \sigma$.

Aufgabe 4* 3* + 3* Punkte

Ein *Büchi-Spiel* $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, F)$, wobei $F \subseteq V$, ist ein Spiel bei dem Spieler 0 eine unendlich lange Partie genau dann gewinnt, wenn unendlich oft Knoten aus der Menge F besucht werden. Wir sagen, dass Spieler 1 in diesem Spiel mit einer *coBüchi*-Gewinnbedingung spielt.

(a) Geben Sie eine LFP-Formel an, die die Gewinnregion von Spieler 0 definiert.

(b) Präzisieren und beweisen Sie die Aussage, dass Büchi/coBüchi-Spiele Spezialfälle von Paritätsspielen sind.

Aufgabe 5* 4* Punkte

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ ein Paritätsspiel. Eine positionale Strategie σ nennen wir *homogen*, wenn sie für alle Knoten mit gleicher Nachfolgermenge den gleichen Nachfolger auswählt, d. h. falls

$$uE = vE \implies \sigma(u) = \sigma(v)$$

gilt. (Beachten Sie, dass $\Omega(u) \neq \Omega(v)$ möglich ist.)

Zeigen Sie, dass Paritätsspiele homogen positional determiniert sind, dass es also positionale homogene Strategien σ_0 (für Spieler 0) und σ_1 (für Spieler 1) gibt, so dass σ_i von allen Knoten in der Gewinnregion W_i von Spieler i eine Gewinnstrategie ist.

Hinweis: Konstruieren Sie zu $\mathcal{G}$ in geeigneter Weise ein neues Paritätsspiel und verwenden Sie anschließend den Satz über die positionale Determiniertheit von Paritätsspielen.