Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, K. Dannert

WS 2017/18

Musterlösung 6.Übung Mathematische Logik II

Lösung zu Aufgabe 3

Wir wollen zeigen, dass die folgenden Eigenschaften (auf Basis von ZF) äquivalent zum Auswahlaxiom sind:

(1) Auf jeder Menge A existiert eine Funktion f, so dass für alle nicht leeren $a \in A$ gilt, dass $f(a)$ eine endliche, nicht leere Teilmenge von a ist.

(2) Jede partiell geordnete Menge hat eine maximale Teilmenge paarweise unvergleichbarer Elemente.

(3) Auf jeder linear geordneten Menge A existiert eine Wohlordnung.

(4) Auf der Potenzmenge jeder wohlgeordneten Menge existiert eine Wohlordnung.

(e) Um eine Auswahlfunktion auf einer Menge A anzugeben genügt es zu zeigen, dass auf $\bigcup A$ eine Wohlordnung existiert. Zu $\bigcup A$ existiert nach dem Kreationsaxiom eine Stufe s, die eine Menge ist, mit $\bigcup A \subseteq s$. Es genügt also zu zeigen, dass auf jeder Stufe eine Wohlordnung definiert werden kann.
Offensichtlich kann man auf $\emptyset$ eine Wohlordnung $\emptyset$ definieren. Sei nun S eine Stufe und für alle Stufen $s \in S$ bereits eine Wohlordnung definiert. Falls S eine Nachfolgerstufe von S' ist, ist S die Potenzmenge von S', also existiert nach (4) eine Wohlordnung auf S. Sei nun $S = \bigcup_{s \in S} H(s)$ eine Limesstufe. Definiere eine Wohlordnung auf S durch $a < b$ für $a, b \in S$ genau dann, wenn entweder $S(a) \in S(b)$ oder wenn $S(a) = S(b)$ und $a <^* b$, wobei $<^*$ die wie oben auf der Potenzmenge von $S(a)$ definierte Wohlordnung bezeichnet.

Lösung zu Aufgabe 4

Wir wollen zeigen, dass aus der Aussage, dass jeder Vektorraum eine Basis hat, das Auswahlaxiom folgt (auf Basis von ZF).
Sei dazu A eine Menge und $X = \bigcup A$. Wenn wir die Elemente von X zu $\mathbb{F}_2$ adjungieren, erhalten wir den Körper $\mathbb{F}_2(X)$ der *rationalen Funktionen* über $\mathbb{F}_2$ mit Variablen in X. Die Elemente von $\mathbb{F}_2(X)$ haben die Form $\frac{p}{q}$, wobei $q \neq 0$ und $p, q \in \mathbb{F}_2[X]$, das heißt p und q sind Polynome der Form

$$\sum_{e \in E} \left(a_e \prod_{x \in X} x^{e(x)} \right), \text{ wobei } a_e \in \mathbb{F}_2,\ E = \{e \colon X \to \omega \mid e(x) \neq 0 \text{ für endlich viele } x \in X\}$$

und nur endlich viele a_e sind ungleich 0. Die Terme der Form $\prod_{x \in X} x^{e(x)}$ mit $e \in E$, nennen wir *Monome*. Für $a \in A$ definieren wir den a-Grad $g_a(m)$ eines Monoms $m \in k[X]$ als die Summe der Exponenten von Elementen aus a, die in m vorkommen, also $g_a(\prod_{x \in X} x^{e(x)}) = \sum_{x \in a} e(x)$. Eine rationale Funktion $f = \frac{p}{q} \in \mathbb{F}_2(X)$ heißt a-homogen vom Grad $d \in \mathbb{Z}$, wenn alle Monome in q den gleichen a-Grad $n \in \omega$ haben und der a-Grad aller Monome in p gleich $n + d$ ist.
Die Menge der für alle $a \in A$ a-homogenen Funktionen vom Grad 0 bildet einen Körper K

und $\mathbb{F}_2(X)$ ist ein Vektorraum über K. Nach Voraussetzung besitzt $k(X)$ eine Basis B als K-Vektorraum. Sei nun $a \in A$ und $x, y \in a$. Dann existieren eindeutige Teilmengen $B(x), B(y) \subseteq B$ und eindeutige Koeffizienten $c_x(b) \neq 0$ und $c_y(b) \neq 0$ aus K für alle $b \in B(x)$ beziehungsweise $B(y)$, so dass

$$x = \sum_{b \in B(x)} c_x(b) \cdot b,$$
$$y = \sum_{b \in B(y)} c_y(b) \cdot b.$$

Es ist $\frac{x}{y}$ a-homogen vom Grad 0, da x und y als Funktionen in $k(X)$ jeweis a-Grad 1 haben. Also ist

$$x = \frac{x}{y} \cdot y = \sum_{b \in B(y)} (\frac{x}{y} \cdot c_y(b)) \cdot b.$$

Da die Darstellung von x als Linearkombination der Basiselemente eindeutig ist, folgt $B(x) = B(y)$ (daher von nun an mit B(a) bezeichnet) und $c_x(b) = (\frac{x}{y} \cdot c_y(b))$ für alle $b \in B(a)$. Da $x, y \in A$ beliebig waren, enthält die eindeutigen Darstellungen jedes Elements x aus a als Linearkombination von Basiselemente dieselben Basiselemente und deren Koeffizienten haben die Form $(\frac{x}{y} \cdot c_y(b))$ für jedes beliebige $y \in a$, unterscheiden sich also nur in einem Faktor x. Damit sind die $c(b) := \frac{1}{y} c_y(b)$ gleich für alle $y \in a$ und da $x \cdot c(b)$ für alle $x \in a$ in K liegt, hat jedes $c(b)$ a-Grad -1. Also enthält der Nenner jedes $c(b)$ mindestens ein Element aus a. Da der Nenner ein Polynom in $k[X]$ ist, liegen im Nenner von $c(b)$ für alle $b \in B(a)$ nur endlich viele Elemente aus a und auch $B(a)$ ist endlich. Definiere also $f(a)$ als die Menge der $x \in a$, die in einem der Nenner der $c(b)$, $b \in B(a)$ vorkommen. Mit Aufgabe 3 (1) folgt das Auswahlaxiom.