

Lokalität der Prädikatenlogik und der Satz von Seese

Seminar Logik, Komplexität, Spiele: Algorithmische Meta-Theoreme und parametrisierte Komplexität

Lukas Pieper

Wintersemester 2021/22

Inhaltsverzeichnis

1	Notation und Definitionen	1
2	Der Satz von Hanf	2
3	Der Satz von Gaifman	4
4	Der Satz von Seese	8
5	Praktische Anwendungen	9

1 Notation und Definitionen

Im Folgenden schreiben wir $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ für Strukturen und A, B, \dots für deren Universen. Dabei sind alle betrachteten Strukturen stets über einer endlichen relationalen Signatur, die wir gegebenenfalls um Konstanten erweitern.

Um Aussagen über Lokalität treffen zu können, wird zwangsläufig eine Art von Abstand benötigt. Eine Klasse von Strukturen, die so ein Maß grundsätzlich bieten, ist die Klasse der Graphen. Damit wir nicht auf diese beschränkt sind, sondern über Distanzen in beliebigen relationalen Strukturen sprechen können, nutzen wir die Abstandsfunktion im Gaifman-Graph.

Definition 1 (Gaifman-Graph). Sei \mathfrak{A} eine τ -Struktur. Der *Gaifman-Graph* $\mathcal{G}(\mathfrak{A}) = (V^{\mathcal{G}(\mathfrak{A})}, E^{\mathcal{G}(\mathfrak{A})})$ von \mathfrak{A} ist definiert als der ungerichtete Graph über der Knotenmenge $V^{\mathcal{G}(\mathfrak{A})} = A$ mit der Kantenrelation

$$E^{\mathcal{G}(\mathfrak{A})} = \{(a, b) \mid a \neq b \text{ und es gibt ein Tupel } \bar{c} \in R^{\mathfrak{A}} \text{ für eine Relation } R \in \tau, \text{ das } a \text{ und } b \text{ enthält}\}.$$

Sei zur Veranschaulichung $\mathfrak{A} = (\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34\}, R^{\mathfrak{A}})$ wobei $R^{\mathfrak{A}}$ der Graph der Addition ist. Der Gaifman-Graph $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ von \mathfrak{A} ist dann wie in Abbildung 1 dargestellt.

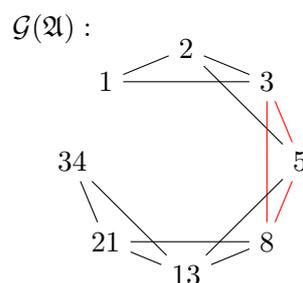


Abbildung 1: Der Gaifman-Graph $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ von \mathfrak{A} . Die roten Kanten gehören zum Graph, weil $3 + 5 = 8$ und damit $(3, 5, 8) \in R^{\mathfrak{A}}$ ist.

Wir bezeichnen mit $d^{\mathfrak{A}}$ die übliche Abstandsfunktion zweier Knoten im Gaifman-Graph $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ von \mathfrak{A} .

Für $r \geq 0$ nennen wir die Menge $N_{\mathfrak{A}}^r(a) = N^r(a) = \{b \in A \mid d^{\mathfrak{A}}(a, b) \leq r\}$ die r -Nachbarschaft von a . Für ein Tupel $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ legen wir

$$N^r(\bar{a}) = \bigcup_{1 \leq i \leq k} N^r(a_i)$$

fest.

Der r -Isomorphietyp eines Elements $a \in A$ ist der Isomorphietyp, das heißt die Äquivalenzklasse bezüglich der Relation \cong , der Struktur $(\mathfrak{A} \upharpoonright N^r(a), a)$. Dabei bezeichnet $\mathfrak{A} \upharpoonright N^r(a)$ die von $N^r(a)$ auf \mathfrak{A} induzierte Substruktur.

2 Der Satz von Hanf

Hanfs Satz ist eine Aussage über die Ausdrucksstärke der Prädikatenlogik. Zusätzlich stellt er eine Technik dar, m -Äquivalenz von Strukturen zu zeigen, bei der lediglich die Realisierungen lokaler Isomorphietypen gezählt werden müssen.

Definition 2 (Hanf-Äquivalenz). Seien $r \geq 0$ und $t \geq 0$. Zwei τ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind genau dann (r, t) -Hanf äquivalent, wenn für jeden Isomorphietyp ι gilt, dass die Anzahl der $a \in A$ mit r -Isomorphietyp ι gleich der Anzahl der $b \in B$ mit r -Isomorphietyp ι ist oder beide Anzahlen größer als der Schwellwert t sind.

Satz 3 (Hanf). Sei $m \geq 0$ und seien \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zwei τ -Strukturen, sodass alle 3^m -Nachbarschaften in \mathfrak{A} und \mathfrak{B} höchstens $e \geq 0$ Elemente haben.

Falls \mathfrak{A} und \mathfrak{B} $(3^m, m \cdot e)$ -Hanf äquivalent sind, dann gilt $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Beweis. Wir zeigen per Induktion, dass es eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin im Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gibt. Dabei halten wir im $(m - j)$ -ten Zug (d.h. für

$|\bar{a}| = |\bar{b}| = m - j$) die folgende Invariante aufrecht:

$$(\mathfrak{A} \upharpoonright N^{3^j}(\bar{a}), \bar{a}) \cong (\mathfrak{B} \upharpoonright N^{3^j}(\bar{b}), \bar{b})$$

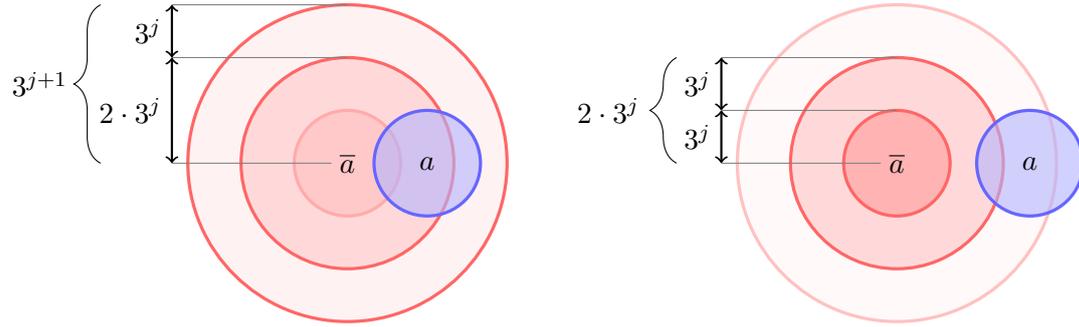
Aus Symmetriegründen genügt es, eine Richtung zu zeigen. Wir nehmen also an, dass bereits

$$(\mathfrak{A} \upharpoonright N^{3^{j+1}}(\bar{a}), \bar{a}) \cong (\mathfrak{B} \upharpoonright N^{3^{j+1}}(\bar{b}), \bar{b}) \quad (1)$$

gilt und finden für $a \in A$ ein $b \in B$, sodass

$$(\mathfrak{A} \upharpoonright N^{3^j}(\bar{a}a), \bar{a}a) \cong (\mathfrak{B} \upharpoonright N^{3^j}(\bar{b}b), \bar{b}b).$$

Abhängig vom Abstand von a und \bar{a} können zwei Fälle auftreten:



Fall 1 (links). Falls $a \in N^{2 \cdot 3^j}(\bar{a})$, dann ist $N^{3^j}(a) \subseteq N^{3^{j+1}}(\bar{a})$. Wegen (1) gibt es ein passendes $b \in N^{3^{j+1}}(\bar{b})$, das wir wählen können.

Fall 2 (rechts). Falls $a \notin N^{2 \cdot 3^j}(\bar{a})$, dann gilt $N^{3^j}(a) \cap N^{3^j}(\bar{a}) = \emptyset$. Wir müssen also nur irgendein $b \in B$ finden, das den gleichen 3^j -Isomorphietyp wie a hat und dessen 3^j -Nachbarschaft sich nicht mit der von \bar{b} schneidet (das also außerhalb von $N^{2 \cdot 3^j}(\bar{b})$ liegt). Wegen (1) enthalten $N^{2 \cdot 3^j}(\bar{a})$ und $N^{2 \cdot 3^j}(\bar{b})$ gleich viele Elemente mit dem gleichen 3^j -Isomorphietyp wie a . Weil \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ($3^m, m \cdot e$)-Hanf äquivalent sind, haben wir zwei Fälle.

Fall 2.1. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} enthalten gleich viele Elemente mit dem gleichen 3^j -Isomorphietyp wie a . Weil a selbst nicht in $N^{2 \cdot 3^j}(\bar{a})$ liegt, muss es auch ein $b \in B$ außerhalb von $N^{2 \cdot 3^j}(\bar{b})$ geben, das den gleichen 3^j -Isomorphietyp wie a hat.

Fall 2.2. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} enthalten beide mehr als $m \cdot e$ Elemente, mit dem gleichen 3^j -Isomorphietyp wie a . Jede 3^m -Nachbarschaft eines Elements in \mathfrak{A} oder \mathfrak{B} hat höchstens e Elemente, weshalb $N^{2 \cdot 3^j}(\bar{b})$ höchstens $m \cdot e$ Elemente haben kann ($|\bar{b}| = m - j \leq m$ und $j < m$). \mathfrak{B} enthält allerdings mehr als $m \cdot e$ Elemente, die den gleichen 3^j -Isomorphietyp wie a haben, also insbesondere eines außerhalb von $N^{2 \cdot 3^j}(\bar{b})$. Wählen wir dieses als b sind wir fertig. \square

Als Beispiel für eine Anwendung des Satzes von Hanf soll nun ein Korollar bewiesen werden. Dieses lässt sich auch auf andere Weise zeigen, indem eine Gewinnstrategie für ein Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel angegeben wird. Der Satz von Hanf vereinfacht den Beweis allerdings enorm.

Korollar. Graphzusammenhang kann in der Prädikatenlogik nicht ausgedrückt werden.

Beweis. Sei G ein ungerichteter Graph. Angenommen es gäbe eine prädikatenlogische Formel φ mit

$$G \models \varphi \text{ gdw. } G \text{ ist zusammenhängend.}$$

Seien $m = \text{qr}(\varphi)$ und $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m$ wie in Abbildung 2. Jede 3^m -Nachbarschaft in \mathfrak{A}_m und \mathfrak{B}_m

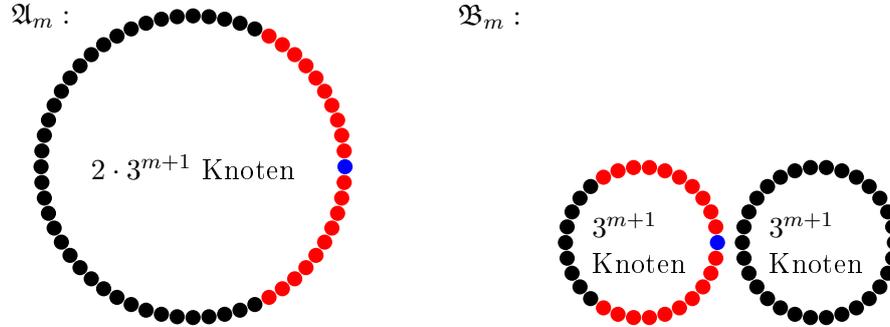


Abbildung 2: Die 3^m -Nachbarschaften (rot) der blauen Knoten reichen nie um den gesamten Kreis und sind deshalb isomorph.

hat höchstens $e = 2 \cdot 3^m + 1$ Elemente. Außerdem haben \mathfrak{A}_m und \mathfrak{B}_m gleich viele Knoten und jede 3^m -Nachbarschaft in einem der beiden Graphen hat den gleichen Isomorphietyp. \mathfrak{A}_m und \mathfrak{B}_m sind also $(3^m, k)$ -Hanf äquivalent für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit insbesondere für $k = m \cdot e$. Nach Satz 3 gilt deshalb $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$. Es folgt

$$\mathfrak{A}_m \models \varphi \text{ gdw. } \mathfrak{B}_m \models \varphi,$$

was einen Widerspruch darstellt, da \mathfrak{A}_m zusammenhängend ist \mathfrak{B}_m jedoch nicht. \square

3 Der Satz von Gaifman

Der erste Eindruck von der Lokalität der Prädikatenlogik, den wir durch den Satz von Hanf erhalten haben, wird durch den Satz von Gaifman weiter präzisiert. Dieser sagt im Grunde aus, dass durch prädikatenlogische Formeln ausschließlich lokale Eigenschaften spezifiziert werden können und liefert gleichzeitig eine Normalform für Sätze.

Definition 4 (Lokale Formeln und Sätze). Für eine Formel ψ ist $\psi^{N^r(\bar{x})}$ die Relativierung von ψ auf die r -Nachbarschaft von \bar{x} . Man erhält $\psi^{N^r(\bar{x})}$ aus ψ , indem jeder Quantifizierung über eine Variable y die Bedingung $d(\bar{x}, y) \leq r$ hinzugefügt wird. Beispielsweise wäre für $\psi = \exists y \forall z \varphi$

$$\psi^{N^r(\bar{x})} = \exists y (d(\bar{x}, y) \leq r \wedge \forall z (d(\bar{x}, z) \leq r \rightarrow \varphi^{N^r(\bar{x})}).$$

Die syntaktische Struktur von $\psi^{N^r(\bar{x})}$ garantiert dann, dass die Auswertung dieser Formel nur von der r -Nachbarschaft von \bar{x} abhängt.

Einen Satz der Form

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (d(x_i, x_j) > 2r \wedge \psi^{Nr(x_i)}(x_i))$$

nennen wir *einfach lokal*. Er beschreibt die Existenz von mindestens n Elementen, deren r -Nachbarschaften paarweise disjunkt sind und die alle eine gewisse (durch $\psi^{Nr(x_i)}(x_i)$ spezifizierte) Eigenschaft erfüllen, die nur von der jeweiligen r -Nachbarschaft abhängt.

Ein *lokaler* Satz ist eine boolesche Kombination von einfachen lokalen Sätzen. Wir bezeichnen außerdem eine Formel $\varphi(\bar{x})$ als *r -lokal*, wenn ihre Auswertung nur von der r -Nachbarschaft von \bar{x} abhängt. Eine r -lokale Formel muss nicht zwingend eine Struktur wie $\psi^{Nr(x)}$ haben aber für jede Formel $\psi(\bar{x})$ ist $\psi^{Nr(\bar{x})}(\bar{x})$ r -lokal.

Definition 5 (m -Hintikka-Formeln). Für eine Struktur \mathfrak{A} seien

$$\varphi_{\bar{a}}^0(x_1, \dots, x_s) := \bigwedge \{ \varphi(x_1, \dots, x_s) \mid \varphi \text{ atomar oder negiert atomar mit } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \}$$

und für $m > 0$

$$\varphi_{\bar{a}}^m(x_1, \dots, x_s) := \underbrace{\bigwedge_{a \in A} \exists x_{s+1} \varphi_{\bar{a}a}^{m-1}(x_1, \dots, x_{s+1})}_{\text{für jedes } a \text{ gibt es ein } b} \wedge \underbrace{\forall x_{s+1} \bigvee_{a \in A} \varphi_{\bar{a}a}^{m-1}(x_1, \dots, x_{s+1})}_{\text{für jedes } b \text{ gibt es ein } a}.$$

Da es bis auf Äquivalenz nur endlich viele verschiedene Formeln $\varphi_{\bar{a}a}^{m-1}$ gibt, was sich induktiv zeigen lässt, stellen die Disjunktion und Konjunktion über alle Elemente von A auch für unendliche Strukturen kein Problem dar.

$\varphi_{\bar{a}}^m$ formalisiert exakt die Existenz einer Gewinnstrategie für die Duplikatorin im Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$, weshalb

$$\mathfrak{B} \models \varphi_{\bar{a}}^m(\bar{b}) \text{ gdw. } (\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathfrak{B}, \bar{b})$$

gilt.

Um den Satz von Gaïfman zu beweisen, soll zunächst das folgende Lemma gezeigt werden. Danach folgt der eigentliche Satz durch Anwendung des Kompaktheitssatzes.

Lemma 6. *Wenn \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die gleichen einfachen lokalen Sätze erfüllen, dann ist $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.*

Beweis. Ähnlich wie beim Beweis von Satz 3 zeigen wir, dass es für alle $m \geq 0$ eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gibt. Dieses mal soll

$$(\mathfrak{A} \upharpoonright N^{7^j}(\bar{a}), \bar{a}) \equiv_{g(j)} (\mathfrak{B} \upharpoonright N^{7^j}(\bar{b}), \bar{b})$$

für eine passende Abbildung g als Invariante beim $(m - j)$ -ten Zug erhalten werden.

Den Induktionsanfang bildet $\emptyset \equiv_{g(m)} \emptyset$. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass

$$(\mathfrak{A} \upharpoonright N^{7^{j+1}}(\bar{a}), \bar{a}) \equiv_{g(j+1)} (\mathfrak{B} \upharpoonright N^{7^{j+1}}(\bar{b}), \bar{b}) \quad (2)$$

gilt und suchen für gegebenes $a \in A$ ein $b \in B$, sodass

$$(\mathfrak{A} \upharpoonright N^{7^j}(\bar{a}a), \bar{a}a) \equiv_{g(j)} (\mathfrak{B} \upharpoonright N^{7^j}(\bar{b}b), \bar{b}b)$$

gilt.

Um solche Äquivalenzen innerhalb der Prädikatenlogik selbst zu beschreiben definieren wir die 7^j -lokale Formel

$$\psi_d^j(\bar{x}) := \left(\varphi_d^{g(j)} \right)^{N^{7^j}(\bar{x})}.$$

Eine Struktur \mathfrak{C} ist genau dann ein Modell von $\psi_d^j(\bar{c})$, wenn die 7^j -Nachbarschaft von \bar{c} in \mathfrak{C} $g(j)$ -äquivalent zu der 7^j -Nachbarschaft von \bar{d} in \mathfrak{D} ist.

Wir bezeichnen im Folgenden alle Elemente aus B , deren 7^j -Nachbarschaften $g(j)$ -äquivalent zu der 7^j -Nachbarschaft von a sind und die nicht in \bar{b} sind, als *Kandidaten* für b .

Fall 1 ($a \in N^{2 \cdot 7^j}(\bar{a})$). Der Satz

$$\exists z(d(\bar{a}, z) \leq 2 \cdot 7^j \wedge \psi_{\bar{a}a}^j(\bar{a}, z))$$

beschreibt die Existenz eines Elements in der $2 \cdot 7^j$ -Nachbarschaft von \bar{a} , dessen 7^j -Nachbarschaft $g(j)$ -äquivalent zu der von a ist. In $(\mathfrak{A} \upharpoonright N^{7^{j+1}}(\bar{a}), \bar{a})$ ist dieser Satz offensichtlich durch a selbst erfüllt. Wir fordern nun, dass $g(j+1)$ größer als der Quantorenrang dieses Satzes ist, denn dann erfüllt wegen unserer Induktionsvoraussetzung (2) auch $(\mathfrak{B} \upharpoonright N^{7^{j+1}}(\bar{b}), \bar{b})$ den Satz. Damit existiert dann ein $b \in B$ mit den gewünschten Eigenschaften. Die Forderung an g ist in Ordnung, da der Quantorenrang des Satzes nur von j und $g(j)$ abhängt.

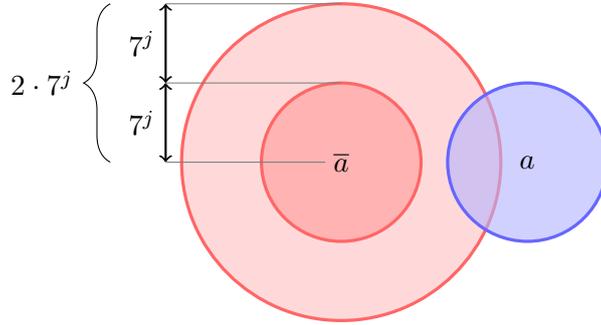


Abbildung 3: $a \notin N^{2 \cdot 7^j}(\bar{a}) \implies N^{7^j}(\bar{a}) \cap N^{7^j}(a) = \emptyset$

Fall 2 ($a \notin N^{2 \cdot 7^j}(\bar{a})$). Aus Abbildung 3 geht hervor, dass $N^{7^j}(\bar{a}) \cap N^{7^j}(a) = \emptyset$ ist. Wir müssen daher nur einen Kandidaten für b finden, dessen 7^j -Nachbarschaft nicht mit der von \bar{b} überlappt. Dazu betrachten wir zunächst wie viele Elemente, deren 7^j -Nachbarschaften $g(j)$ -äquivalent zu der von a sind, jeweils in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, N^{2 \cdot 7^j}(\bar{a})$ und $N^{2 \cdot 7^j}(\bar{b})$ maximal gewählt werden können, sodass sich ihre 7^j -Nachbarschaften nicht schneiden. Für alle $s \geq 1$ sei

$$\delta_s(x_1, \dots, x_s) := \bigwedge_{1 \leq l < k \leq s} d(x_l, x_k) > 4 \cdot 7^j \wedge \bigwedge_{1 \leq l \leq s} \psi_a^j(x_l)$$

und seien i und e die gesuchten Anzahlen in \mathfrak{A} bzw. $N^{2 \cdot 7^j}(\bar{a})$, dann sind i und e formal definiert, sodass

$$\mathfrak{A} \models \exists x_1 \dots \exists x_i \delta_i, \quad \mathfrak{A} \not\models \exists x_1 \dots \exists x_{i+1} \delta_{i+1}, \quad (3)$$

$$(\mathfrak{A} \upharpoonright N^{7^{j+1}}(\bar{a}), \bar{a}) \models \exists x_1 \dots \exists x_e \left(\bigwedge_{1 \leq k \leq e} d(\bar{a}, x_k) \leq 2 \cdot 7^j \wedge \delta_e \right), \quad (4)$$

$$(\mathfrak{A} \upharpoonright N^{7^{j+1}}(\bar{a}), \bar{a}) \not\models \exists x_1 \dots \exists x_{e+1} \left(\bigwedge_{1 \leq k \leq e+1} d(\bar{a}, x_k) \leq 2 \cdot 7^j \wedge \delta_{e+1} \right). \quad (5)$$

Wir möchten nun, dass die Werte für \mathfrak{B} und $N^{2 \cdot 7^j}(\bar{b})$ identisch zu i bzw. e sind. Da die Formeln in (3) einfache lokale Sätze sind und wir annehmen, dass \mathfrak{A} und \mathfrak{B} die gleichen einfachen lokalen Sätze erfüllen, gilt das für i . Für e benötigen wir eine weitere Bedingung an g . Wir fordern, dass $g(j+1)$ größer ist als die Quantorengrade der Sätze aus (4) und (5). Da in einer $2 \cdot 7^j$ -Nachbarschaft von einem einzelnen Element alle Elemente einen Abstand von höchstens $4 \cdot 7^j$ haben, ist $e \leq |\bar{a}| \leq m$. Also hängen die Quantorengrade von den Sätzen aus (4) und (5) nur von m , j und $g(j)$ ab und unsere Forderung an $g(j+1)$ ist in Ordnung.

Fall 2.1 ($e < i$). Es gibt einen Kandidaten für b außerhalb von $N^{2 \cdot 7^j}(\bar{b})$. Da sich die 7^j -Nachbarschaft dieses Kandidaten nicht mit $N^{7^j}(\bar{b})$ schneidet, können wir ihn als b wählen.

Fall 2.2 ($e = i$). Aus Abbildung 4 lässt sich erkennen, dass alle Elemente, deren 7^j -Nachbarschaften $g(j)$ -äquivalent zu der von a sind, in $N^{6 \cdot 7^j}(\bar{a})$ liegen, da sonst i nicht mehr maximal wäre. Insbesondere ist also $a \in N^{6 \cdot 7^j}(\bar{a})$. Außerdem ist $a \notin N^{2 \cdot 7^j}(\bar{a})$. In A gibt es also ein Element z (nämlich a), dessen 7^j -Nachbarschaft $g(j)$ -äquivalent zu der von a ist und für das gilt $2 \cdot 7^j < d(\bar{a}, z) \leq 6 \cdot 7^j$. Wir halten die Existenz eines solchen Elements in einem Satz fest und fordern wieder, dass $g(j+1)$ größer ist als der Quantorenrang von diesem Satz. Damit ist auch \mathfrak{B} ein Modell des Satzes und folglich gibt es ein passendes $b \in B$. \square

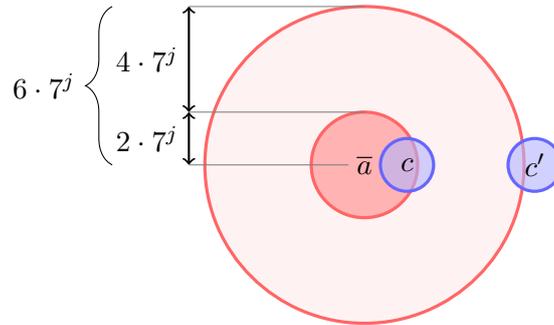


Abbildung 4: $c \in N^{2 \cdot 7^j}(\bar{a}) \wedge c' \notin N^{6 \cdot 7^j}(\bar{a}) \implies d(c, c') > 4 \cdot 7^j$

Satz 7 (Gaifman). *Jeder prädikatenlogische Satz ist äquivalent zu einem lokalen Satz.*

Beweis. Zu einem Satz φ möchten wir einen äquivalenten lokalen Satz finden. Sei \mathfrak{A} ein Modell von φ und $\Phi(\mathfrak{A})$ die Menge aller einfachen lokalen Sätze, die von \mathfrak{A} erfüllt werden und der Negationen von allen einfachen lokalen Sätzen, die von \mathfrak{A} nicht erfüllt werden. Ist eine Struktur \mathfrak{B} Modell von $\Phi(\mathfrak{A})$, dann erfüllt sie also genau die gleichen einfachen lokalen Sätze, wie \mathfrak{A} . Nach Lemma 6 wissen wir, dass dann $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und damit \mathfrak{B} auch ein Modell von φ ist. Also gilt $\Phi(\mathfrak{A}) \models \varphi$. Nach dem Kompaktheitssatz existiert eine endliche Teilmenge $\Phi_0(\mathfrak{A}) \subseteq \Phi(\mathfrak{A})$ mit $\Phi_0(\mathfrak{A}) \models \varphi$.

Wir betrachten nun die Modellklasse $\mathcal{K} = \text{Mod}(\varphi)$ von φ . Wie gerade gezeigt gilt $\bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_0} \bigwedge \Phi_0(\mathfrak{A}) \models \varphi$ für alle endlichen Teilklassen $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$. Wir möchten zeigen, dass es eine endliche Teilklasse $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ gibt, sodass $\varphi \models \bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_0} \bigwedge \Phi_0(\mathfrak{A})$, denn dann ist φ äquivalent zu einem lokalen Satz nämlich $\bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_0} \bigwedge \Phi_0(\mathfrak{A})$. Nehmen wir an, es gäbe keine solche Klasse \mathcal{K}_0 , dann wäre $\{\varphi\} \cup \{\neg \bigwedge \Phi_0(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{K}_0\}$ für alle $\mathcal{K}_0 \subseteq \mathcal{K}$ erfüllbar. Nach dem Kompaktheitssatz wäre auch $\{\varphi\} \cup \{\neg \bigwedge \Phi_0(\mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}$ erfüllbar, was einen Widerspruch darstellt, denn jedes Modell \mathfrak{A} von φ liegt in \mathcal{K} und ist damit Modell von $\bigwedge \Phi_0(\mathfrak{A})$. \square

Dieser Satz rechtfertigt es lokale Sätze als eine Normalform zu bezeichnen, die wir Gaifman-Normalform (GNF) nennen.

4 Der Satz von Seese

Eine algorithmische Verwendung der Gaifman-Normalform liefert der Satz von Seese. Hier soll der Beweis aus [Kre09] vorgestellt werden, der etwas von dem ursprünglichen in [See95] abweicht.

Satz 8 (Seese). *Für jede Klasse \mathcal{K} von Graphen mit beschränktem Grad und jeden prädikatenlogischen Satz φ ist $G \models \varphi$ mit $G \in \mathcal{K}$ in linearer Zeit (in der Größe von G) entscheidbar.*

Beweis. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, dessen Grad durch eine Konstante beschränkt ist und φ ein prädikatenlogischer Satz. Nach Satz 7 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass φ lokal ist. Per Definition ist φ dann eine boolesche Kombination von einfachen lokalen Sätzen der Form

$$\psi := \exists x_1 \dots \exists x_k \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} d(x_i, x_j) > 2r \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq k} \vartheta(x_i) \right),$$

wobei ϑ eine r -lokale Formel (das bedeutet die Auswertung von $\vartheta(x_i)$ hängt nur von $N^r(x_i)$ ab) ist. Für die effiziente Auswertung von φ sind die booleschen Kombinationen kein Problem, weshalb wir uns darauf beschränken, zu zeigen wie ψ in linearer Zeit ausgewertet werden kann. Dazu ermitteln wir zunächst die Menge Q aller Knoten $v \in V$, für die $G \upharpoonright N^r(v) \models \vartheta$ gilt. Da der Grad von G beschränkt ist, kann $|N^r(v)|$ als konstant angenommen werden und somit ist dieser Schritt linear in der Anzahl der Knoten. Nun müssen wir prüfen, ob es mindestens k solcher Knoten gibt, die paarweise einen Abstand von mehr als $2r$ haben. (Man sieht leicht an der Struktur von ψ , dass genau in diesem

Fall $G \models \psi$ gilt.) Dazu iterieren wir über alle Elemente $v \in Q$ und fügen sie der Menge L hinzu, falls $v \notin N^{2r}(L)$ ist.

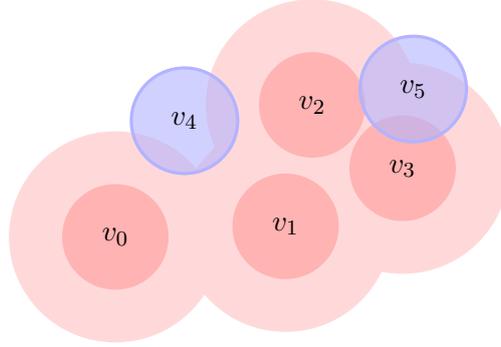


Abbildung 5: Hier ist $L = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$. Der Knoten v_5 liegt in $N^{2r}(L)$ (hellrot) und kann daher nicht gewählt werden, v_4 hingegen schon.

Fall 1 ($|L| \geq k$). Wir haben genug Knoten in V gefunden, die die Bedingungen von ψ erfüllen, sodass insgesamt $G \models \psi$ gilt.

Fall 2 ($|L| < k$). Wir haben nicht genug Knoten gefunden, die die Anforderungen erfüllen. Es ist jedoch möglich, dass wir bei dem Erstellen von L einfach nicht die richtigen Knoten gewählt haben. Wir wissen aber, dass jeder Knoten in Q , den wir nicht gewählt haben, in $N^{2r}(L)$ liegt, denn sonst hätten wir ihn ja gewählt. Also ist $Q \subseteq N^{2r}(L)$. Da $|N^{2r}(L)|$ für unsere Betrachtung konstant ist, können wir in konstanter Zeit prüfen, ob $N^{2r}(L)$ mindestens k Knoten enthält, die zusammen ψ erfüllen. \square

5 Praktische Anwendungen

Ein effizienter Algorithmus, der das Problem aus Satz 8 löst, hätte breite Anwendung in der Praxis. Warum Algorithmen, die den Ansatz aus dem Beweis von Satz 8 nutzen, allerdings grundsätzlich keine praxisrelevanten Laufzeiten erzielen können, soll in diesem Abschnitt geklärt werden.

Satz 9. Falls $P \neq NP$, dann gibt es keinen Polynomialzeitalgorithmus (in der Größe von G und φ), der für einen beliebigen Graph G mit durch $d \geq 0$ beschränktem Grad und eine Formel φ entscheidet, ob $G \models \varphi$ gilt.

Beweis. Wir zeigen, dass falls es einen solchen Algorithmus gibt, $P = NP$ gilt. Sei ψ eine aussagenlogische Formel. Wir übersetzen diese in ein prädikatenlogisches Äquivalent bestehend aus einer Struktur \mathfrak{A} und einem Satz φ über der Signatur $\{Q\}$, wobei Q ein einstelliges Relationssymbol ist. Die Konstruktion wird hier nur an einem Beispiel gezeigt. Für $\psi = (\neg X_0 \vee X_1) \wedge (\neg X_0 \vee \neg X_2)$ ist

$$\varphi = \exists x_0 \exists x_1 \exists x_2 ((\neg Q(x_0) \vee Q(x_1)) \wedge (\neg Q(x_0) \vee \neg Q(x_2)))$$

und \mathfrak{A} wie folgt:

$$\mathfrak{A} : \begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \\ \hline Q & \boxed{a'_0 \quad a'_1 \quad a'_2} & \end{array}$$

Die Formel ψ ist genau dann erfüllbar, wenn \mathfrak{A} ein Modell von φ ist. Das bedeutet, falls es einen Algorithmus gibt, der entscheidet ob $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt und der eine polynomielle Laufzeit sowohl in der Größe von \mathfrak{A} als auch von φ hat, dann lässt sich mit Hilfe dieses Algorithmus in polynomieller Zeit entscheiden, ob ψ erfüllbar ist. Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik läge also in P , womit $P = NP$ folgen würde. \square

Eine direkte Konsequenz dieses Satzes ist, dass unter der Annahme $P \neq NP$ die Laufzeit des Algorithmus aus Satz 8 Konstanten haben muss, die schlechter als polynomiell in der Größe der Eingabeformel sind. Wie schlecht die Konstanten jeglicher Algorithmen, die auf die Gaifman-Normalform zurückgreifen tatsächlich sind, zeigt folgender Satz.

Satz 10 (Dawar, Grohe, Kreutzer, Schweikardt). *Für jedes $h \geq 1$ gibt es einen Satz φ_h über der Signatur $\{E\}$ der Größe $\mathcal{O}(h^4)$, sodass jeder lokale Satz, der auf der Klasse der endlichen Bäume äquivalent zu φ_h ist, mindestens eine Länge von $2 \uparrow\uparrow h$ hat.*

Dabei ist

$$2 \uparrow\uparrow h = \underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{h \text{ Kopien}}.$$

Es gibt also schon für sehr grundlegende Fälle (Signatur $\{E\}$ und endliche Bäume als Struktur) Formeln, die die Laufzeit des Algorithmus aus Satz 8 so stark steigen lassen, dass er für die praktische Anwendung nutzlos ist.

Literatur

- [See95] Detlef Seese. “Linear Time Computable Problems and Logical Descriptions”. In: *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 2 (1995), S. 246–259.
- [EF99] Heinz-Dieter Ebbinghaus und Jörg Flum. *Finite model theory*. Springer, 1999.
- [Kre09] Stephan Kreutzer. “Algorithmic Meta-Theorems”. In: *Electronic Colloquium on Computational Complexity* 16 (2009), S. 147.